ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

12

DERS KİTABI

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 28.05.2018 tarih ve 78 sayılı (ekli listenin 157'nci sırasında) kurul kararıyla 2018-2019 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

YAZAR

Mehmet Hanefi ALTUN

ISBN
978-975-8851-89-8

Dil Uzmanı
Necla ŞANAL

Görsel Tasarım Uzmanı
Aysel GÜNEY TÜRKEÇ

TUTKU YAYINCILIK

Kavacık Subayevleri Mah. Fahrettin Altay Cad. No.: 4/8 Keçiören/ANKARA

tel.: (0.312) 318 51 51 - 50 • belgegeçer: 318 52 51



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

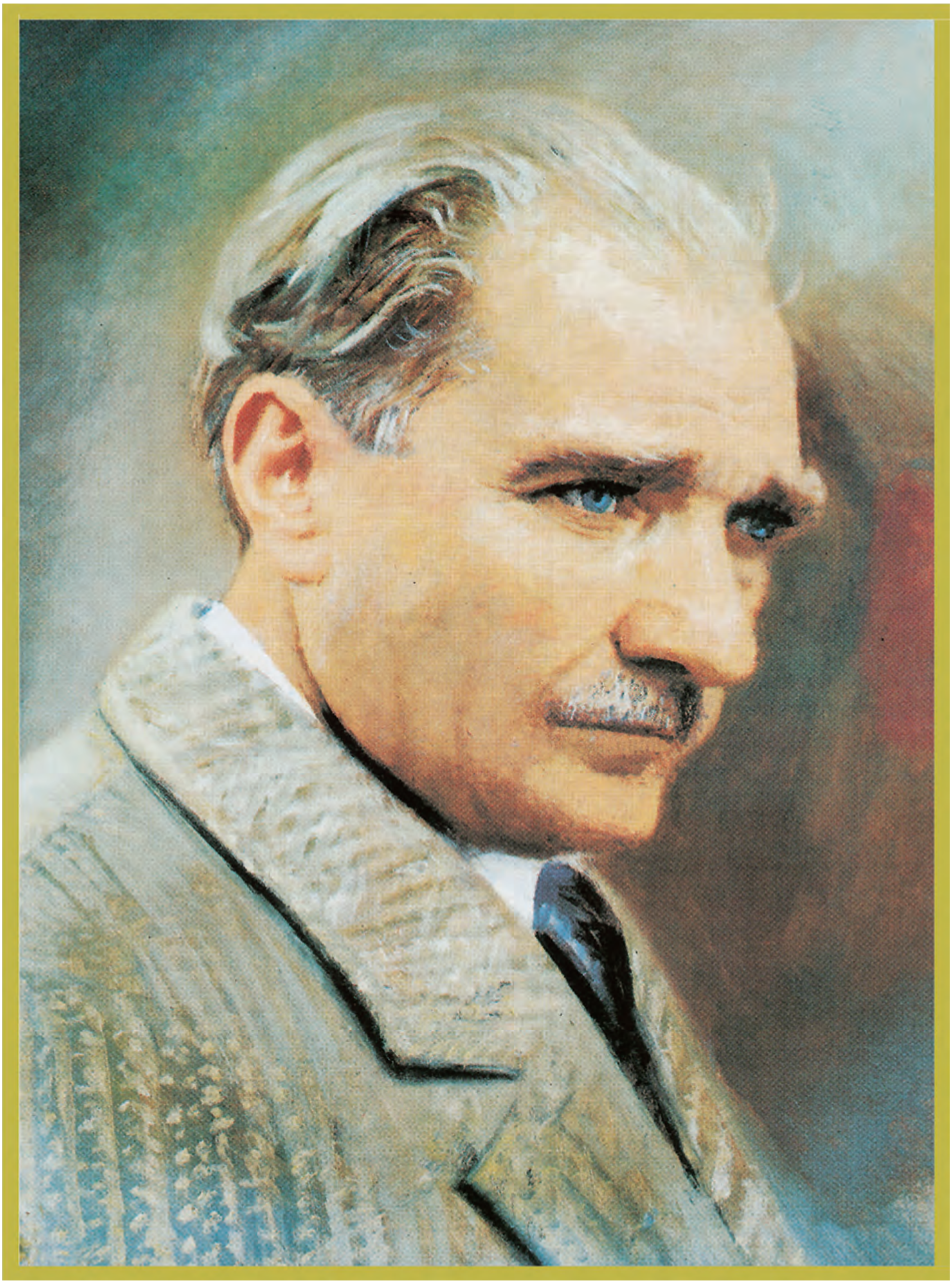
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



Mustafa Kemal ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

GEOMETRİ

SAYILAR VE CEBİR

GEOMETRİ

ORGANİZASYON ŞEMASI

Konu ile ilgili tanım, özellik ve özet bilgilerin verildiği bölümdür.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $\log_a 1 = 0$ dır.

Konu ile ilgili ispat veya özelliklerin verildiği bölümdür.

$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Giriş aşamasında konuya dikkat çekmek amacıyla verilen, konunun günlük hayatta nerelerde kullanıldığını açıklayan, konu ile ilgili ön bilgileri ortaya çıkaran veya işlenişin devamında konu ile ilgili çalışmalarıyla ön plana çıkmış matematikçileri tanıtan bölümdür.

Richter ölçeğine göre 6 büyüklüğündeki bir depremin genliği, 5 büyüklüğündeki bir depremin genliğinin 10 katı, 4 büyüklüğündeki bir depremin genliğinin 100 katıdır. 2 büyüklüğünde bir depremin ise 1000 katıdır. Bu durumu işlem ile gösterelim.

İşlenişte dikkat edilmesi gerekenler ve uyarıların verildiği bölümdür.

Sonlu dizi olduğu belirtilmediği sürece her dizinin sonsuz dizi olduğu anlaşılmalıdır.

Konunun keşfettirilmesi ya da uygulanması amacıyla verilen etkinliklerin bulunduğu veya bilişim teknolojilerinden yararlanılan bölümdür.

Sierpinski kalburu bir fraktal örneği olarak 1915'te tasarlanmıştır. Sierpinski kalburu, eşkenar üçgen biçiminde bir siyah yüzey alınarak inşa edilir.

Çözülen örnekler veya etkinliklerin sonucunda yapılan çıkarımlardır.

SONUÇ

$S_N = 1 + r + r^2 + ... + r^N = \sum_{k=0}^{N} r^k$ toplamı, N büyürken, $r \geq 1$ ise sınırsız olarak büyür. $0 \leq r < 1$ ise bir gerçek sayıya yaklaşır.

Örnek çözümlerini kolaylaştırmak amacıyla verilen kısa yol veya hatırlatmaların bulunduğu bölümdür.

Belli bir zaman, başlangıçtaki para miktarı y_0, birim zamandaki faiz yüzdesi x_0 olsun. t zaman sonra başlangıçtaki para miktarı ile para artışının toplamı olan toplam para miktarı y_t olsun.

Bir veya birkaç işlenişin sonunda pekiştirme sorularının verildiği bölümdür.

UYGULAYALIM

Her ünitenin sonunda verilen değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

1. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

İşlemlerde hesap makinesi kullanabileceğini belirten görsel ögedir.



SAYILAR VE CEBİR

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

1.

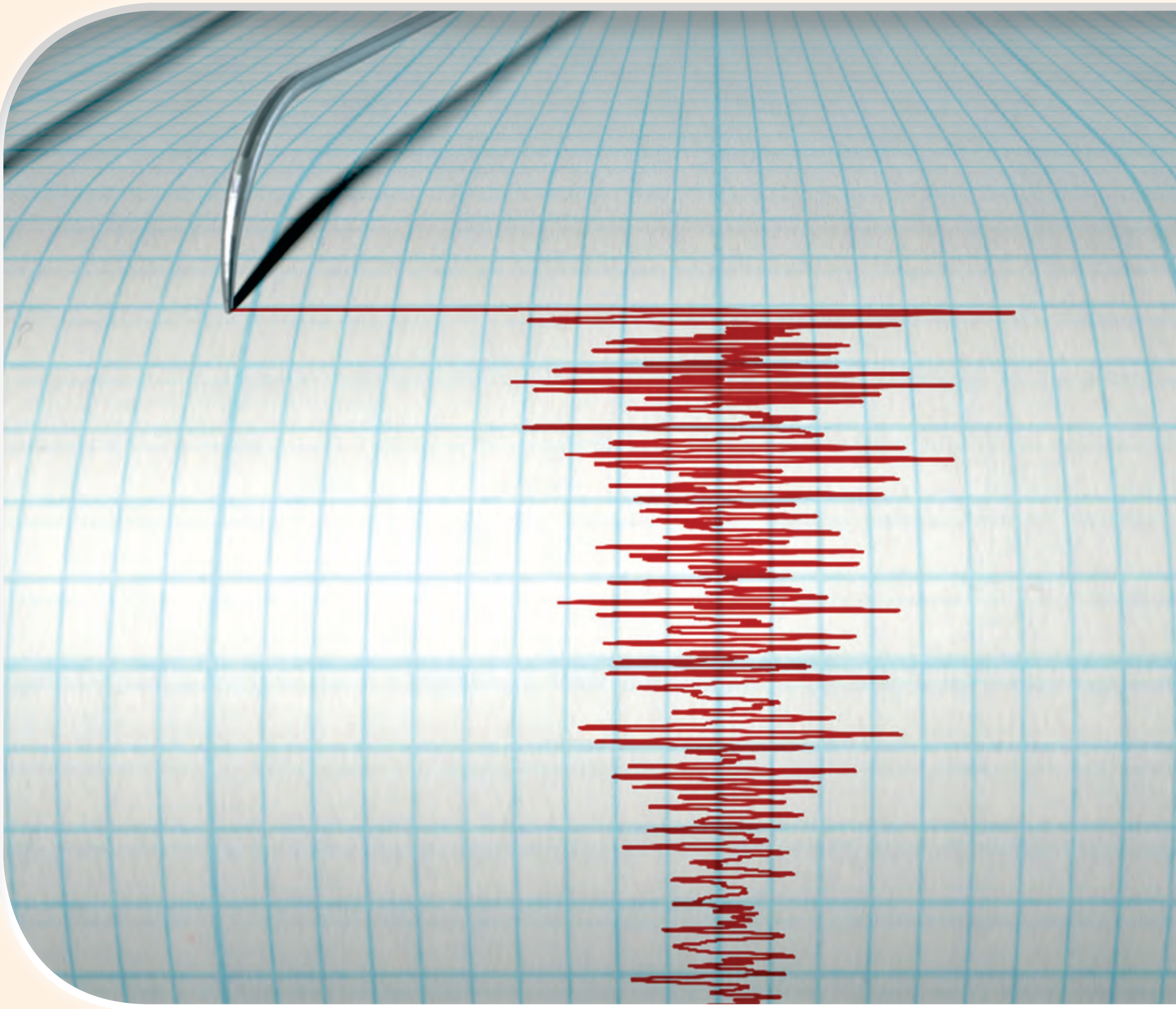
ÜNİTE

1. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

1.1. Üstel Fonksiyon

1.2. Logaritma Fonksiyonu

1.3. Üstel, Logaritmik Denklemler ve Eşitsizlikler



1.1. ÜSTEL FONKSİYON

1.1.1 Üstel Fonksiyon

Üslü Sayılarda İşlemler

Üstel fonksiyon konusuna girmeden önce üslü sayılarda işlemleri hatırlayalım.

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} = a^n$ olacak şekilde n tane a nın çarpımı olan a^n ifadesine **a nın n inci kuvveti** denir. a^n ifadesinde **a taban, n üs** olarak adlandırılır.

0 sayısı hariç bütün reel sayıların sıfırıncı kuvveti 1 dir.

$a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $a^0 = 1$ dir. 0^0 belirsizdir.

- Tabanları eşit olan üslü ifadeler çarpılırken üsler toplanır, tabanı değişmez.

$a \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ tane } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m+n \text{ tane } a} = a^{m+n} \text{ ise } a^m . a^n = a^{m+n} \text{dir.}$$

- Üsleri eşit olan ifadeler çarpılırken tabanlar çarpılır ve ortak üs çarpıma üs olarak yazılır.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n \text{ tane } b} = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots a \cdot b}_{n \text{ tane } a \cdot b} = (a \cdot b)^n \text{ ise } a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \text{dir.}$$

Örnek

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $2^3 \cdot 2^1$ **b)** $(-3)^2 \cdot (-3)^1$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-2)^4$

Çözüm

a) $2^3 \cdot 2^1 = 2^{3+1} = 2^4 = 16$

b) $(-3)^2 \cdot (-3)^1 = (-3)^{2+1} = (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-2)^4 = \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)\right)^4 = 1^4 = 1$

- Tabanları eşit olan iki üslü ifadenin bölümünde payın üssünden paydanın üssü çıkarılır ve ortak tabana üs olarak yazılır.

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{m \text{ tane } a}}{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane } a}} = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m-n \text{ tane } a} = a^{m-n} \text{ dir.}$$

- Tabanları farklı üsleri eşit iki üslü ifadenin bölümünde payın tabanı paydanın tabanına bölünür ve ortak üs, üs olarak yazılır.

$a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{n \text{ tane } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{n \text{ tane } b}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ tane } \frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{dir.}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ve $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ dir.

$a \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

- $$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ tane } a^m} = a^{\overbrace{m+m+\ldots m}^{}_{n \text{ tane } m}}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n} \text{ dir.}$$

- $(a^m)^n = a^{m.n} = a^{n.m} = (a^n)^m$ dir.

$a, x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n$ ve $x \cdot a^n - y \cdot a^n = (x - y) \cdot a^n$ dir.

Örnek

$(2^{-2}.3^2)^{-3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$(2^{-2} \cdot 3^2)^{-3} = (2^{-2})^{-3} \cdot (3^2)^{-3} = 2^{(-2).(-3)} \cdot 3^{2 \cdot (-3)} = 2^6 \cdot 3^{-6} = 2^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

Örnek

$2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 3^9 - 3 \cdot 3^9$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 3^9 - 3 \cdot 3^9 = (2 + 5 - 3) \cdot 3^9 = 4 \cdot 3^9$$

Örnek

$\dfrac{2^6+2^6+2^6+2^6}{2^3\cdot 2^3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{2^6+2^6+2^6+2^6}{2^3\cdot 2^3}=\frac{4\cdot \cancel{2^6}}{\cancel{2^6}}=4$$

Örnek

$3^{12}+27^4+9^6$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$3^{12}+27^4+9^6=3^{12}+(3^3)^4+(3^2)^6=3^{12}+3^{12}+3^{12}=3\cdot 3^{12}=3^{13}$$

Örnek

$a\neq 0$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\dfrac{(-a^{-2})^{-3}\cdot(-a^4)^{-2}\cdot(a^2)^{-1}}{-a^{-3}\cdot(-a)^{-3}}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{(-a^{-2})^{-3}\cdot(-a^4)^{-2}\cdot(a^2)^{-1}}{-a^{-3}\cdot(-a)^{-3}}=\frac{-a^6\cdot a^{-8}\cdot a^{-2}}{a^{-6}}=\frac{-a^{6-8-2}}{a^{-6}}=\frac{-a^{-4}}{a^{-6}}=-a^{-4-(-6)}=-a^2$$

Örnek

$\dfrac{2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2}{2^2+2^2+2^2+2^2+2^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2}{2^2+2^2+2^2+2^2+2^2}=\frac{(2^2)^5}{5\cdot 2^2}=\frac{2^{10}}{5\cdot 2^2}=\frac{1}{5}\cdot 2^{10-2}=\frac{1}{5}\cdot 2^8=\frac{256}{5}$$

Örnek

$x\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\dfrac{2^x+2^{x+2}+2^{x-2}}{2^x+2^{x-2}+2^{x-3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{2^x+2^{x+2}+2^{x-2}}{2^x+2^{x-2}+2^{x-3}}=\frac{2^x+2^x\cdot 2^2+2^x\cdot 2^{-2}}{2^x+2^x\cdot 2^{-2}+2^x\cdot 2^{-3}}=\frac{(1+2^2+2^{-2})\cdot \cancel{2^x}}{(1+2^{-2}+2^{-3})\cdot \cancel{2^x}}=\frac{1+4+\frac{1}{2^2}}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}}=\frac{1+4+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{21}{\cancel{4}_1}}{\frac{11}{\cancel{8}_2}}=\frac{42}{11}$$

Üstel Fonksiyon



Bu bölümde üstel fonksiyonları ele alacağız. Bu fonksiyonlar, $f(x) = a^x \left(a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \in \mathbb{R}\right)$ şeklindeki fonksiyonlardır. Örneğin, $f(x) = 2^x$ bir üstel fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlarda üs, bağımsız değişkendir. Üstel fonksiyonlar; nüfus artışı, yatırım büyümesi, bakteri popülasyonu, fosil yaşı, deprem şiddeti vb. hesaplamalarında kullanılır.

$f(x) = 2^x$ üstel fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun tabanı 2 dir. $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun değerlerinin ne kadar hızlı arttığına dikkat edelim.

$$f(1) = 2^1 = 2$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(3) = 2^3 = 8$$
$$\vdots$$
$$f(10) = 2^{10} = 1024$$
$$\vdots$$
$$f(20) = 2^{20} = 1048576$$
$$\vdots$$

Bu fonksiyonu, $g(x) = x^2$ fonksiyonu ile karşılaştıralım. $g(x) = x^2 \Rightarrow g(20) = 20^2 = 400$ olur. Bu sayının $f(20)$ değerine göre çok daha küçük olduğunu görmekteyiz.

Bu da şunu gösterir: Bir değişken üs olduğunda, üsteki küçük bir değişiklik fonksiyonun değerinde belirgin bir farklılığa neden olmaktadır. Bu durumu aşağıdaki deprem genliği örneği ile açıklayalım.

Richter ölçeğine göre 6 büyüklüğündeki bir depremin genliği, 5 büyüklüğündeki bir depremin genliğinin 10 katı, 4 büyüklüğündeki bir depremin genliğinin 100 katıdır. 3 büyüklüğündeki bir depremin ise 1000 katıdır. Bu durumu işlem ile gösterelim.

2 büyüklüğündeki bir depremin genliği a olsun.

3 büyüklüğündeki bir depremin genliği $a \cdot 10^1 = 10a$

4 büyüklüğündeki bir depremin genliği $a \cdot 10^2 = 100a$

5 büyüklüğündeki bir depremin genliği $a \cdot 10^3 = 1000a$

6 büyüklüğündeki bir depremin genliği $a \cdot 10^4 = 10\,000a$

$$\vdots$$

x büyüklüğündeki bir depremin genliği $a \cdot 10^{x-2}$ şeklinde ifade edilebilir.

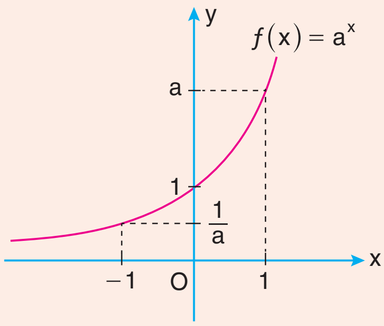
Burada, depremin büyüklüğü küçük miktarda artmış olarak görünse de depremin genliğinin büyük oranda arttığını görmekteyiz.

$a \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = a^{x}$ fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denir.

$f(x) = a^{x}$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

I. $a > 1$ olması durumunda, $f(x) = a^{x}$in değişim tablosunu aşağıdaki gibi çizebiliriz.

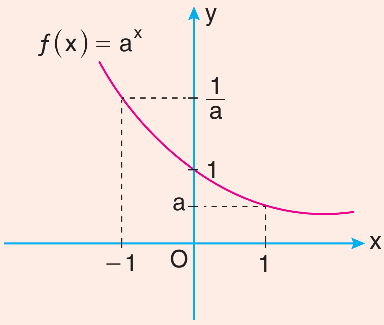
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = a^{x}$	...	↗	$\frac{1}{a}$	↗	1	↗	a	↗	... $+\infty$



Grafiğe göre $a > 1$ olması durumunda $f(x) = a^{x}$ fonksiyonu artandır.

II. $0 < a < 1$ olması durumunda, $f(x) = a^{x}$in değişim tablosunu aşağıdaki gibi çizebiliriz.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = a^{x}$	$+\infty$ ...	↘	$\frac{1}{a}$	↘	1	↘	a	↘	...



Grafiğe göre $0 < a < 1$ olması durumunda $f(x) = a^{x}$ fonksiyonu azalandır.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = 2^{x}$ fonksiyonunun değişim tablosunu yaparak grafiğini çizelim.

Çözüm

$x = -2$ için $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$x = -1$ için $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x = 0$ için $f(0) = 2^{0} = 1$

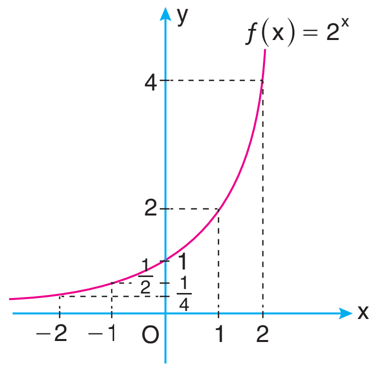
$x = 1$ için $f(1) = 2^{1} = 2$

$x = 2$ için $f(2) = 2^{2} = 4$

Buna göre $f(x) = 2^{x}$ fonksiyonunun değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

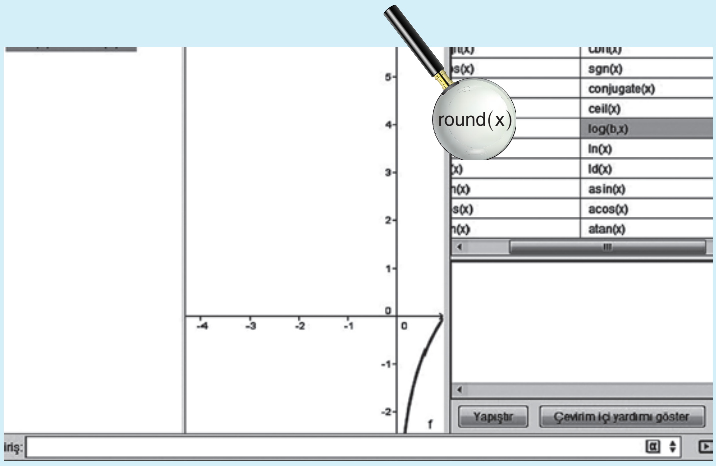
x	$-\infty$ ...		-2		-1		0		1		2		... $+\infty$
$f(x) = a^{x}$	...	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	4	↗	... $+\infty$

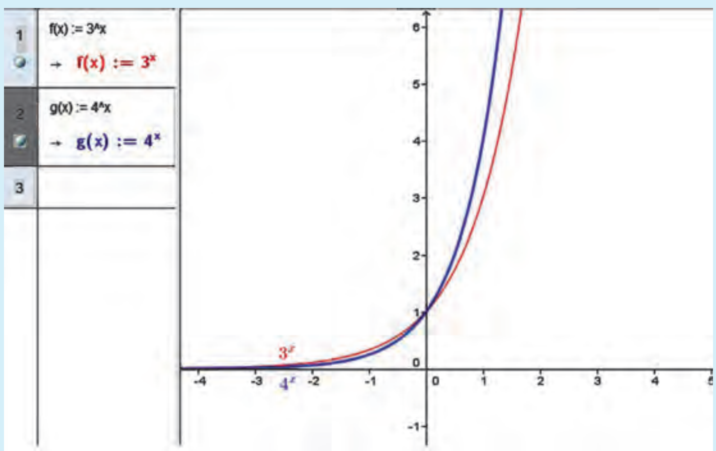
$f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.



$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$ ve $g(x) = 4^x$ fonksiyonlarının grafiklerini bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak çizelim.

GeoGebra programını açarak sağ alt taraftaki butonunu tıklayalım. Açılan pencerede round(x) butonundan yararlanarak birinci satıra 3^x, ikinci satıra 4^x yazalım. Enter tuşuna bastığımızda aşağıdaki grafiği elde ederiz.

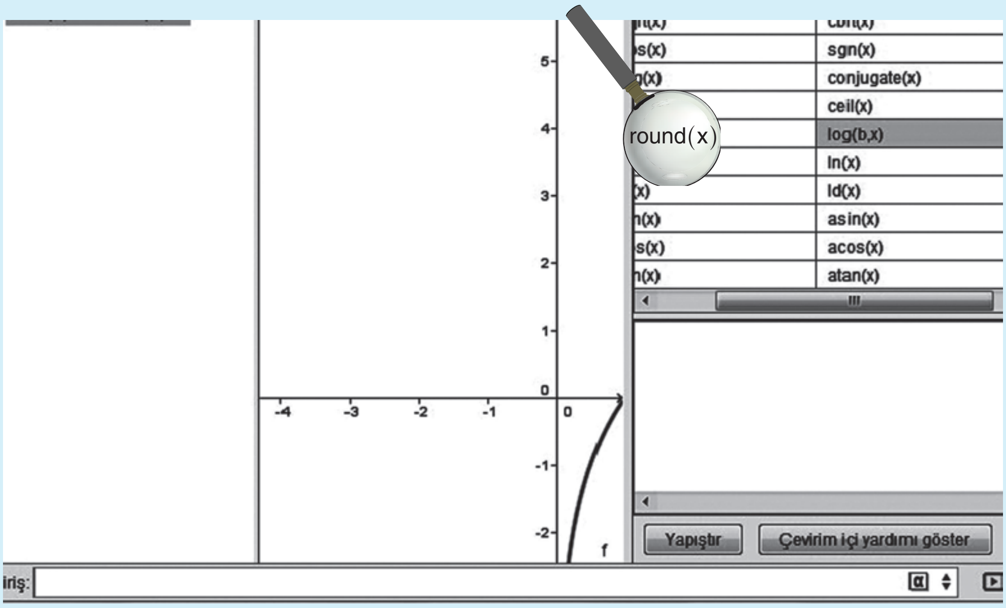


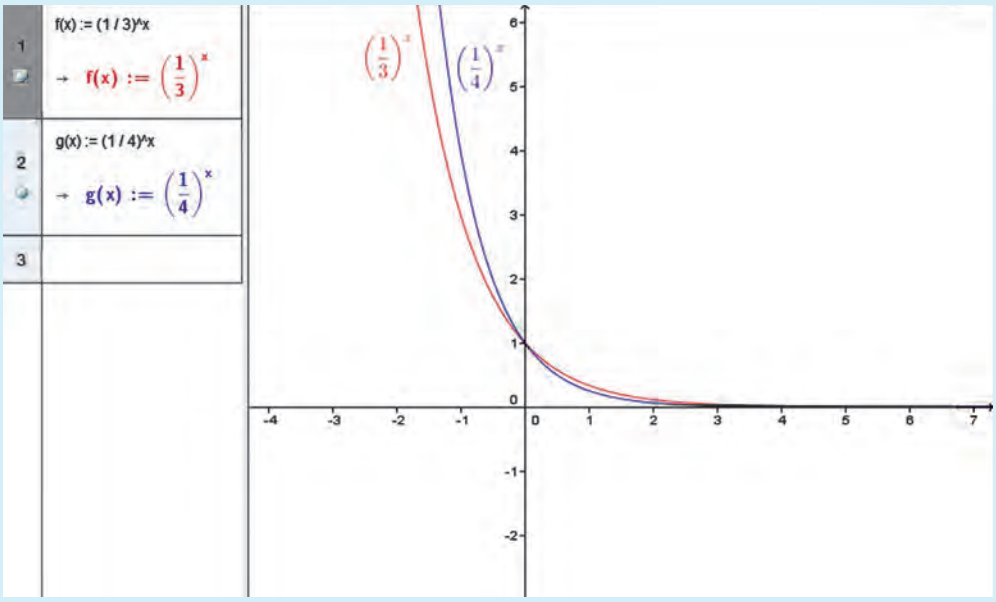


- Grafik incelendiğinde, $f(x) = 3^x$ ve $g(x) = 4^x$ için üstel fonksiyonlarının artan olduğu görülür.

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}, \ f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

GeoGebra programını açarak sağ alt taraftaki ▶ butonunu tıklayalım. Açılan pencereden round(x) butonundan yararlanarak birinci satıra $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, ikinci satıra $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ yazalım. Enter tuşuna basıldığında aşağıdaki grafik elde edilir.





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu;

1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ için $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ olur.

2. $\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $y = a^x$ eşitliğini sağlayan bir tek $x \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

Buna göre $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ üstel fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyondur.

Üstel fonksiyonlar bütün reel sayılar için tanımlıdır. Fakat görüntü kümeleri pozitif reel sayılardır. $f(x) = a^x$ fonksiyonu $a < 0$ için tanımsızdır. Örneğin,

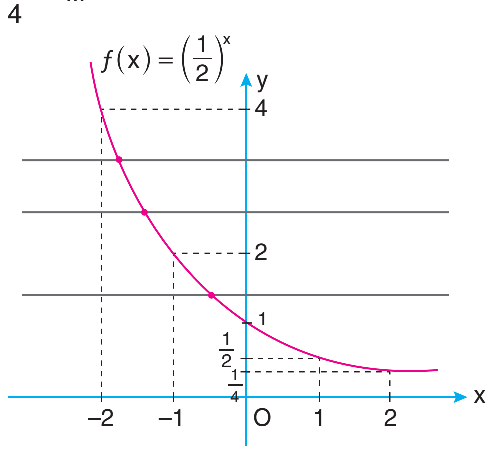
$f(x) = (-3)^x$ fonksiyonu, $x = \frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$ olur. Dolayısıyla $a = -3$ ve $x = \frac{1}{2}$ için $f(x)$ fonksiyonu tanımsızdır.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizerek bire bir ve örten olduğunu gösterelim.

Çözüm

x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	$+\infty$
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$+\infty$	...	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...	



Grafiğe yatay doğru testi uyguladığımızda, çizilen doğruların herbirinin, grafiği bir noktada kestiğini görüyoruz. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu bire birdir. Grafiğe göre görüntü kümesi ile değer kümesi aynı olduğundan fonksiyon örtendir.

Örnek

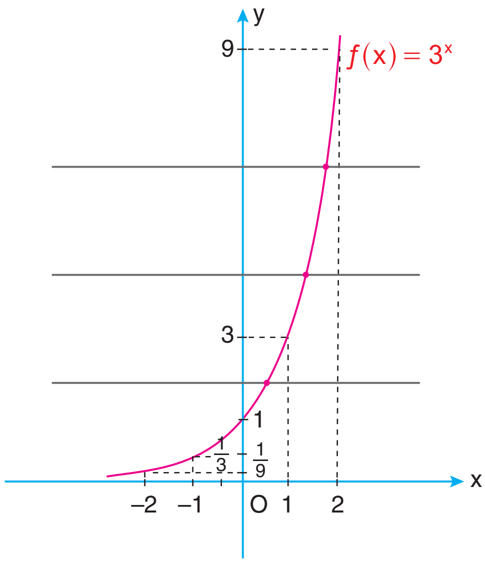
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,\ f(x) = 3^x$ fonksiyonunun bire bir ve örten olduğunu gösterelim.

Çözüm

1. yol

x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	$+\infty$
$f(x) = 3^x$		...	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	...	

Grafiğe yatay doğru testi uyguladığımızda, çizilen doğruların her biri grafiği yalnız bir noktada keser. Ayrıca grafiğe göre görüntü kümesi ile değer kümesi aynı olduğundan fonksiyon örtendir.



2. yol

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ için $3^{x_1} \neq 3^{x_2}$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

$\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $y = 3^x$ eşitliğini sağlayan bir tek $x \in \mathbb{R}$ vardır.

Buna göre

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,\ f(x) = y = 3^x$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki üstel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ **b)** $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = 5^x$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizerek azalan olduğunu gösteriniz.

3. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\},\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” yazınız.

a) ☐ $f(x) = a^x$ fonksiyonu bire birdir.

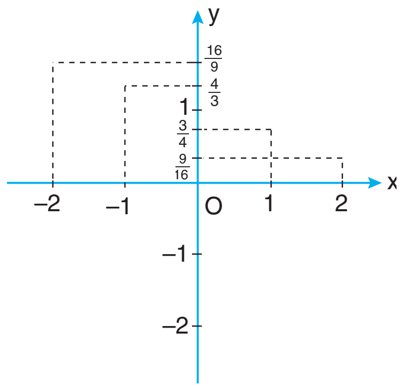
b) ☐ $0 < a < 1$ ise $f(x) = a^x$ azalan bir fonksiyondur.

c) ☐ $a > 1$ ise $f(x) = a^x$ örten değildir.

ç) ☐ $f(x) = a^x$ fonksiyonunun artan olabilmesi için $a > 1$ olmalıdır.

4.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$					



Yukarıdaki tabloyu doldurunuz. Elde ettiğiniz noktaları yandaki analitik düzlemde işaretleyip

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz. Arama motorunu kullanarak diğer konularla ilgili videolara da buradan ulaşabilirsiniz.

1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU

1.2.1. Logaritma Fonksiyonu ile Üstel Fonksiyon Arasındaki İlişki

Bire bir ve örten her fonksiyonun ters fonksiyonu vardır. Üstel fonksiyon da bire bir ve örten olduğundan ters fonksiyonu vardır.

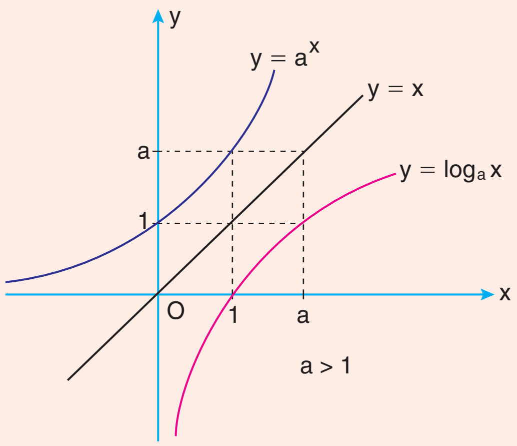
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ fonksiyonunun tersi olan fonksiyona a tabanına göre **logaritma fonksiyonu** denir.

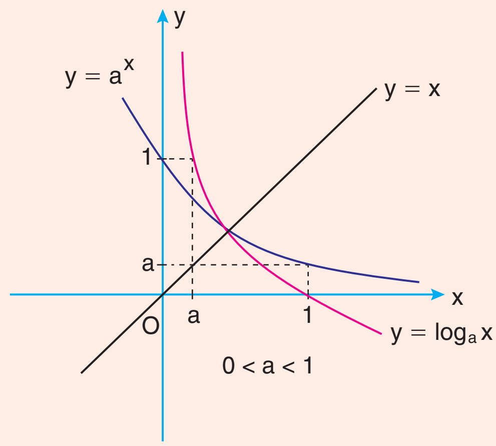
$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ dir.

$y = \log_a x$ fonksiyonu, "y eşittir logaritma a tabanında x" şeklinde okunur.

Logaritma fonksiyonu $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur. $a > 1$ için $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun grafiğini çizmiştik. Bunun ters fonksiyonu olan $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği de $f(x) = a^x$in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olur. Eğer $0 < a < 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği de $y = x$ doğrusuna simetrik olur.





x	0		1		a		+∞
$\log_a x$	‖	↗	0	↗	1	↗	+∞

x	0		a		1		+∞
$\log_a x$	‖	↘	1	↘	0	↘	−∞

Ayrıca grafiğe göre

$f(x) = \log_a x \Rightarrow x = a$ için $\underbrace{f(a)}_{1} = \log_a a \Rightarrow \log_a a = 1$ olur.

Örnek

$f(x) = \log_3 x$ fonksiyonunun değişim tablosunu oluşturarak grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow y = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^y$

$x = \frac{1}{3}$ için $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

$x = 1$ için $f(1) = \log_3 1 = 0$

$x = 3$ için $f(3) = \log_3 3 = 1$

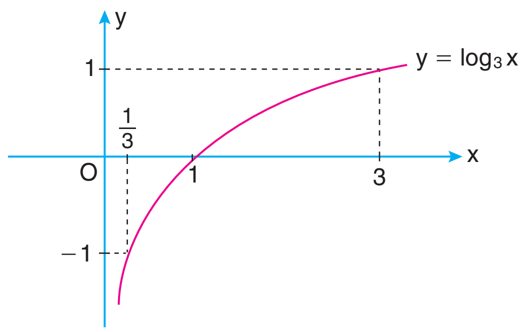
$x = 3^y \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ için $\frac{1}{3} = 3^y \Rightarrow y = -1$

$x = 1$ için $1 = 3^y \Rightarrow y = 0$

$x = 3$ için $3 = 3^y \Rightarrow y = 1$

$f(x) = \log_3 x$ fonksiyonunun değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

x	0	$\frac{1}{3}$	1	3	$+\infty$
$f(x) = \log_3 x$	‖	↗ -1	↗ 0	↗ 1	↗ $+\infty$



$3 > 1$ olup $\log_3 x$ fonksiyonunun artan olduğuna dikkat ediniz.

Örnek

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonunun değişim tablosunu oluşturarak grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{3}} x \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$

$x = \frac{1}{9}$ için $f\left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$

$x = \frac{1}{3}$ için $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$

$x = 1$ için $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$

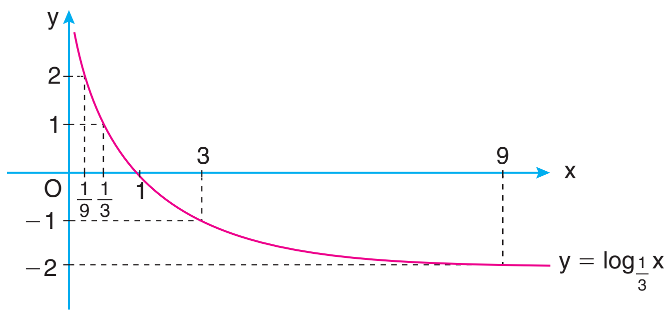
$x = 3$ için $f(3) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

$x = 9$ için $f(9) = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

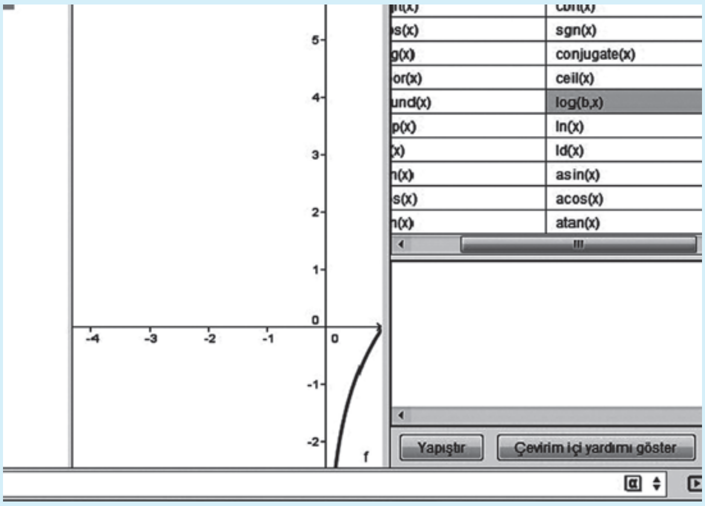
$0 < \frac{1}{3} < 1$ ve $\log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonunun azalan olduğuna dikkat ediniz.

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonunun değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

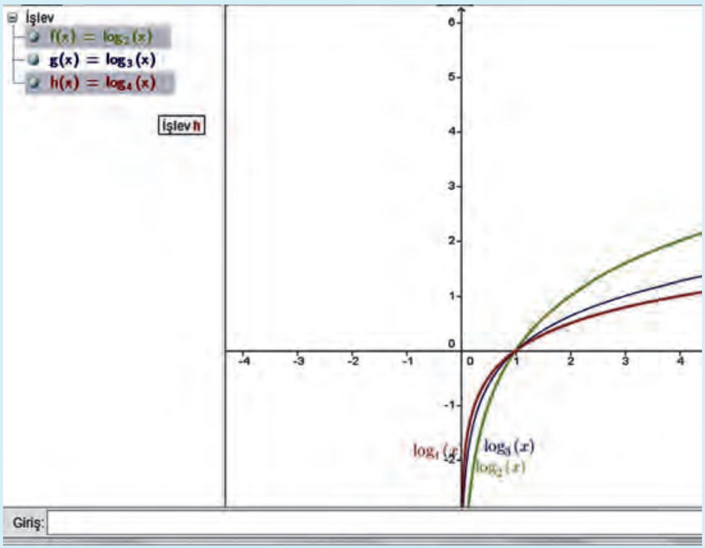
x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	$+\infty$
$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$	‖	↘ 2	↘ 1	↘ 0	↘ -1	↘ -2	↘ $-\infty$



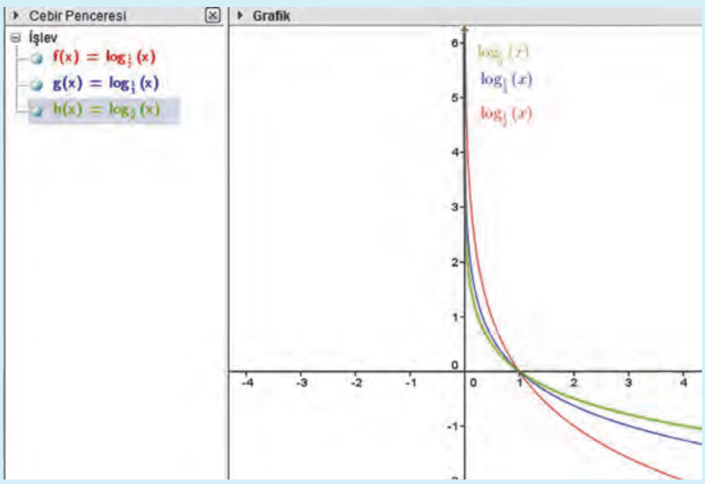
• GeoGebra programını açarak sağ alt taraftaki butonunu tıklayalım. Açılan pencerede $\log(b, x)$ butonundan yararlanarak sırasıyla $\log_2 x$, $\log_3 x$, $\log_4 x$ yazıp grafikleri oluşturalım.



• Tekrar aynı pencereden yararlanarak sırasıyla $\log_{\frac{1}{2}} x$, $\log_{\frac{1}{3}} x$, $\log_{\frac{1}{4}} x$ yazıp grafikleri oluşturalım.



• Taban 1 den büyük ise logaritma fonksiyonunun grafiği artarak, 0 ile 1 aralığında ise logaritma fonksiyonunun grafiği azalarak devam etmektedir.



SONUÇ

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonu,

1) $a > 1$ için $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ ve $x_1 < x_2$ ise $\log_a x_1 < \log_a x_2$ olduğundan artan,

2) $0 < a < 1$ için $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ ve $x_1 < x_2$ ise $\log_a x_1 > \log_a x_2$ olduğundan azalandır.

Örnek

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonu ile bu fonksiyonun tersinin grafiğini aynı analitik düzlemde çizerek grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri, $y = x$ doğrusuna göre simetrik midir?

b) $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonu artan mıdır?

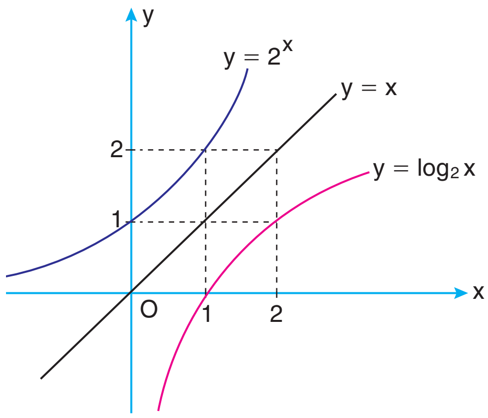
c) $f^{-1}(x)$ fonksiyonu artan mıdır?

ç) $f(x)$ fonksiyonu altında görüntüsü pozitif olan reel sayıların kümesi nedir?

d) $f^{-1}(x)$ fonksiyonu altında görüntüsü negatif olan reel sayıların kümesi nedir?

Çözüm

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ ise $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f^{-1}(x) = 2^x$ olur.



a) $f(x) = \log_2 x$ ile $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonları olduğundan grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

b) $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonu artandır. Çünkü her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ olmaktadır. ($a > 1$ için $\log_a x$ fonksiyonu artandır.)

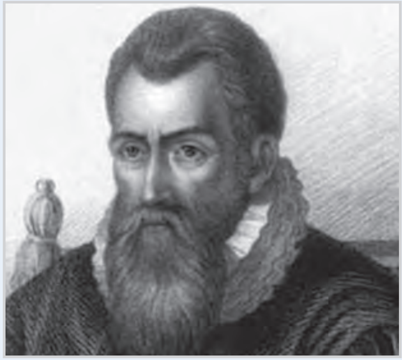
c) $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonu da artandır. (Tabanı birden büyük olan pozitif reel sayıların üsleri büyüdükçe sayı da büyür. Bu durum, fonksiyonun grafiğinde açıkça görülebilir.)

ç) $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonu altında görüntüsü pozitif olan reel sayıların kümesi, $(1, \infty)$ aralığıdır.

d) $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonu altında görüntüsü negatif olan hiçbir reel sayı yoktur.

John Napier (Jon Neypia), aritmetik işlemlerinde büyük kolaylık sağlayan logaritma yöntemini geliştiren İskoç matematikçidir. Boş zamanlarında matematikle uğraşan Napier, özellikle kolay hesap yapma yöntemleriyle ilgilendi. Logaritma kavramını da 1590'larda oluşturduğu, bu konuda uzun yıllar çalışmış olduğu sanılmaktadır. Logaritmaya ilişkin buluşları 1617'de yayımladığı "Hayret Verici Logaritma Kurallarının Tanımı" ve ölümünden iki yıl sonra yayımlanan "Hayret Verici Logaritma Kurallarının Oluşturulması" adlı yapıtlarında yer alır.

Kaynak: Ana Britannica Ansiklopedisi



John Napier (1550-1617)

Örnek

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonu ile bu fonksiyonun tersinin grafiğini aynı analitik düzlemde çizerek grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri, $y = x$ doğrusuna göre simetrik midir?

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonu azalan mıdır?

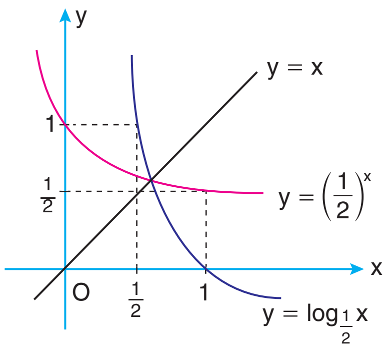
c) $f^{-1}(x)$ fonksiyonu azalan mıdır?

ç) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonu altında görüntüsü pozitif olan reel sayıların kümesi nedir?

d) $f^{-1}(x)$ fonksiyonu altında görüntüsü negatif olan reel sayıların kümesi nedir?

Çözüm

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ise $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ olur.



a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ile $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonları olduğundan $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonu her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu azalandır.

c) $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunda, her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu azalandır. (Tabanı birden küçük olan pozitif reel sayıların üsleri büyüdükçe sayı küçülür. Bu durum, fonksiyonun grafiğinde açıkça görülebilir.)

ç) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonu altında görüntüsü pozitif olan reel sayıların kümesi, $(0, 1)$ aralığındadır.

d) $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonu altında hiçbir reel sayının görüntüsü negatif değildir.

Örnek

$f(x) = \log_{(5-x)}(2x-4)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bulalım.

Çözüm

$\log_a x$ fonksiyonunda $x > 0$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmalıdır.

Buna göre

$2x - 4 > 0 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$

$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$

$5 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$

Bu durumda tanım aralığı, $(2,5) \setminus \{4\}$ olur.

Örnek

$f(x) = \log_{(x+2)}(x^2 - 2x - 3)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm

$f(x) = y = \log_{(x+2)}(x^2 - 2x - 3)$

$x + 2 > 0,$

$x > -2$

$x + 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$(x-3)\cdot(x+1) > 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$

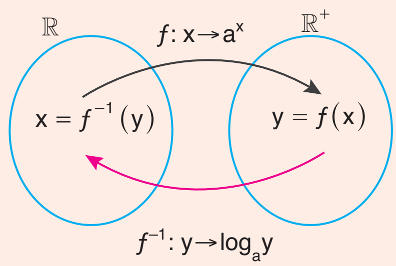
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
x^2-2x-3	+	−	+	

$(-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$

$Ç = \{x : -2 < x < -1 \text{ ve } x > 3, \ x \in \mathbb{R}\} = (-2, -1) \cup (3, +\infty)$ olur.

Yandaki şemayı incelediğimizde üstel fonksiyonu; verilen belli bir tabana "üs koyma" ve ters fonksiyonu olan logaritma fonksiyonunu ise verilen belli bir tabana göre "üs indirme" işlemi olarak düşünebiliriz.

Örneğin; $\log_4 64$ ün değerini "4 sayısının hangi kuvveti 64 eder?" şeklinde düşünerek bulabiliriz.



Aşağıdaki tablonun bazı bölümleri doldurulmuştur. Bunlardan yararlanarak noktalı yerleri siz doldurunuz.

$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$		İşlemler
$64 = 4^{\cdots}$	$\log_4 64 = 3$	$64 = 4^3 \Rightarrow \log_4 64 = 3$
$125 = 5^{\cdots}$	$\log_5 125 = \ldots$	$125 = 5^3 \Rightarrow \log_5 125 = 3$
$9 = 27^{\cdots}$	$\log_{27} 9 = \ldots$	$9 = (3^3)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \log_{27} 9 = \frac{2}{3}$
$0,001 = 10^{\cdots}$	$\log_{10}(0,001) = \ldots$	$0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log_{10}(0,001) = -3$
$128 = 2^{\cdots}$	$\log_2 128 = \ldots$	....
$1000 = (0,01)^{\cdots}$	$\log_{0,01} 1000 = \ldots$	....
$1 = 5^{\cdots}$	$\log_5 1 = \ldots$	....
$32 = 4^{\cdots}$	$\log_4 32 = \ldots$	....
$32 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cdots}$	$\log_{\frac{1}{4}} 32 = \ldots$	....

Örnek

256 sayısının 2 tabanına göre logaritmasını bulalım.

Çözüm

$\log_2 256 = y \Rightarrow 2^y = 256 \Rightarrow 2^y = 2^8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow \log_2 256 = 8$ olur.

Gelenbevi İsmail Efendi, Osmanlı Dönemi'nde matematik hocası olarak görev yaptığı rivayet edilen İslam ilim insanıdır. Matematik konusundaki dehasını ve bu alanda meydana gelen yenilik ve gelişmeleri takip ettiğini, 1787 yılında İstanbul'a gelen bir Fransız mühendisinin Babıâli'ye sunduğu, ancak dönemin ilim adamlarınca pek anlaşılmayan bazı logaritma cetvellerinin nasıl kullanılacağı hususunda yazdığı, Logaritma Şerhi adıyla da tanınan Şerh-i Cedâvili'l-ensâb adlı Türkçe eseriyle ortaya koymuştur. Bu başarısı, Fransız mühendisinin de katıldığı bir toplantıda kutlandı.

Gelenbevi İsmail Efendi, o dönemin ilimlerinin hemen hepsinde söz sahibi olan ve son dönem Osmanlı ilim anlayışıyla günümüze aktaran önemli şahsiyetlerden biridir.

Kaynak: TDV İslam Ansiklopedisi

Örnek

$f:(1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_2(x-1)$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$\log_2(x-1) = y \Rightarrow x-1 = 2^y \Rightarrow x = 2^y + 1$

$f^{-1}(y) = x$ olduğundan $f^{-1}(y) = 2^y + 1$ bulunur. Buna göre $f^{-1}(x) = 2^x + 1$ dir.

Örnek

$\log_{0,01} x = \frac{1}{2}$ ise x değerini bulalım.

Çözüm

$\log_{0,01} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (0,01)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{0,01} \Rightarrow x = \sqrt{(0,1)^2} \Rightarrow x = 0,1$ dir.

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki logaritma fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

a) $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_3 x$ **b)** $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ **c)** $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_5 x$

2. Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **b)** $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = 5^x$ **c)** $f:(5,\infty) \to \mathbb{R},$ $f(x) = \log_2(x-5)$

3. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\log_2 128$ **b)** $\log_3 81$ **c)** $\log_{\frac{1}{3}} 27$ **ç)** $\log_5 \frac{1}{625}$

4. $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_3(x+1)$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

5. $f(x) = \log_{(x+1)}\left(\frac{x-4}{2-x}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

6. $f(x) = \log_{(x+1)}(25-x)^2$ fonksiyonunu tanımlı yapan x tamsayılarının toplamını bulunuz.

7. $f(x) = \log_5\left(\frac{3x-5}{x+1}\right)$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}(1)$ değerini bulunuz.

1.2.2. 10 ve e Tabanında Logaritma Fonksiyonu

10 Tabanında Logaritma Fonksiyonu

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** denir.

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{10} x = \log x$ şeklinde gösterilir.

Örnek

$\log 10,\ \log 100,\ \log 1000,\ \log 1,\ \log \frac{1}{10},\ \log \frac{1}{100}$ değerlerini bulalım.

Çözüm

$\log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10 \Rightarrow y = 1$

$\log 100 = y \Leftrightarrow 10^y = 100 \Rightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$

$\log 1000 = y \Leftrightarrow 10^y = 1000 \Rightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$

$\log 1 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$

$\log \frac{1}{10} = y \Leftrightarrow 10^y = \frac{1}{10} \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$

$\log \frac{1}{100} = y \Leftrightarrow 10^y = \frac{1}{100} \Rightarrow 10^y = 10^{-2} \Rightarrow y = -2$

Okyanus coğrafyası (oşinografi) alanında yapılan araştırmalar, plajın eğimi ile üzerindeki kum tanecikleri-nin büyüklüğü arasında bir ilişki olduğunu göstermiştir.



Plajın eğimi m ve kum taneciklerinin ortalama çapı d (mm cinsinden) olmak üzere bu ilişki,

$m = 0,159 + 0,118 \cdot \log d$

biçiminde modellenmiştir. Örneğin; kum taneciklerinin ortalama çapı $d = 0,25$ mm olan bir plajın eğimi hesap makinesi kullanılarak

$$m = 0,159 + 0,118 \cdot \log(0,25)$$
$$\cong 0,159 + (0,118) \cdot (-0,602)$$
$$\cong 0,088 \text{ bulunur.}$$

Buna göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Çap (d)	Kum türü	Plaj eğimi (m)
8 mm	Çakıl	
2 mm	Granül (Tanecik)	
1 mm	Çok iri taneli kum	
0,5 mm	İri taneli kum	
0,125 mm	İnce kum	

x sayısının alacağı çok büyük pozitif ve çok küçük negatif değerler için $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadesi bir sayıya yaklaşmaktadır. Bu değere **e sayısı** denir ve bu sayı π gibi sabit bir sayıdır.

$e \cong 2,71828182845...$ olup bu sayı irrasyoneldir. e irrasyonel sayısı; matematik, kimya, iktisat, istatistik gibi alanlarda kullanılmaktadır. Ekonomik büyüme, nüfus büyümesi ve radyoaktif bozunma modellerinde de yine e sayısı kullanılır.

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadesinde x bilinmeyenin yerine sırasıyla 2, 4, 6, 8, ... değerlerini yazıp sonucu hesap makinesi ile bulalım.

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2,4414...$

$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = 2,5216...$

$\left(1+\frac{1}{8}\right)^8 = 2,5657...$

⋮

Bu şekilde işleme devam ettiğimizde elde edilen değer e irrasyonel sayısına yaklaşacaktır.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x in tablodaki değerlere göre $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadesinin alacağı değerleri hesap makinesi yardımıyla bulunuz. Bulduğunuz değerleri tabloya yazınız.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	
10	
100	
1 000	
1 000 000	
1 000 000 000	
⋮	⋮

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
–2	
–10	
–100	
–1 000	
–1 000 000	
–1 000 000 000	
⋮	⋮

x in alacağı çok büyük pozitif ve çok küçük negatif değerler için $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadesinin e sayısına yaklaşıp yaklaşmadığını kontrol ediniz.

Tabanı e olan logaritma fonksiyona **doğal logaritma** fonksiyonu denir.

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_e x = \ln x$ şeklinde gösterilir.

$\ln e = \log_e e = 1$ ve $\ln 1 = \log_e 1 = 0$

Örnek

$f(x) = \ln x$ fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm

$f(x) = \ln x \Rightarrow y = \ln x \Rightarrow y = \log_e x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow f^{-1}(y) = e^y \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x$

1.2.3. Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Aşağıdaki işlemleri hesap makinesi yardımıyla yapıp tabloya yazınız.

log10		log1	
$\log_2 2$		$\log_5 1$	
$\log_5 5$		ln1	

Tabloyu inceleyerek ulaştığınız sonucu açıklayınız.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\log_a a = 1$ dir.

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$

Örnek

log10 un değerini bulalım.

Çözüm

$\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\log_a 1 = 0$ dır.

$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Örnek

$\log_3 1$ ve ln1 in değerini bulalım.

Çözüm

$\log_3 1 = 0$ ve $\ln 1 = \log_e 1 = 0$ dır.

Örnek

$\log_5(\log_3(2x-3)) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerini bulalım.

Çözüm

$$\log_5(\log_3(2x-3)) = 0 \Rightarrow \log_3(2x-3) = 5^0 = 1$$
$$2x - 3 = 3^1$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

Aşağıdaki işlemleri hesap makinesi yardımıyla yapıp tabloyu doldurunuz.

$\log 2 = \ldots$	$\log 3 = \ldots$	$\log 6 = \ldots$	$\log 2 + \log 3 = \ldots$
$\log 3 = \ldots$	$\log 4 = \ldots$	$\log 12 = \ldots$	$\log 3 + \log 4 = \ldots$
$\log 5 = \ldots$	$\log 6 = \ldots$	$\log 30 = \ldots$	$\log 5 + \log 6 = \ldots$
$\log 10 = \ldots$	$\log 2 = \ldots$	$\log 5 = \ldots$	$\log 10 - \log 2 = \ldots$

Tabloyu inceleyerek ulaştığınız sonucu açıklayınız.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ dir.

$\left.\begin{aligned} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{aligned}\right\}$ olsun. $a^p = x$ ve $a^q = y$ yazılabilir. Bu eşitliği taraf tarafa çarpalım.

$x.y = a^p \cdot a^q = a^{p+q} \Rightarrow x \cdot y = a^{p+q} \Leftrightarrow \log_a(x \cdot y) = p + q \Rightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Örnek

$\log 2 = x$ ve $\log 5 = y$ ise $\log 10$ un x ve y cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

$\log 10 = \log(2 \cdot 5) = \log 2 + \log 5 = x + y$ bulunur.

Örnek

$\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$, $\log_2 7 = c$ ise $\log_2 210$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow \log_2 210 = \log_2(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7 = 1 + a + b + c$

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ dir.

$\left.\begin{aligned} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{aligned}\right\}$ olsun. $a^p = x$ ve $a^q = y$ dir. Bu iki eşitliği taraf tarafa bölelim.

$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{p-q} \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = p - q \Rightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ bulunur.

Örnek

$\log 2 = x$ ise $\log 5$ in x cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - x$

Aşağıdaki işlemleri hesap makinesi yardımıyla yapıp tabloyu doldurunuz.

$\log_2 32 = ...$	$5 \cdot \log_2 2 = ...$
$\log_3 27 = ...$	$3 \cdot \log_3 3 = ...$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = ...$	$2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = ...$

Tabloyu inceleyerek ulaştığınız sonucu açıklayınız.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\},\ x \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ tir.

$$\log_a x^n = \log_a \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{n \text{ tane}} = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \log_a x + \cdots + \log_a x}_{n \text{ tane}} = n \cdot \log_a x$$ olur.

Örnek

$\log_2 16$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$

Örnek

$\log 2 + \log 5 + \log 10$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\log 2 + \log 5 + \log 10 = \log(2 \cdot 5 \cdot 10) = \log 100 = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2$$

Örnek

$\log 2 = x$ ve $\log 3 = y$ ise log144 ün x ve y türünden değerini bulalım.

Çözüm

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$\begin{aligned}\log 144 &= \log(2^4 \cdot 3^2)\\ &= \log 2^4 + \log 3^2\\ &= 4 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3\\ &= 4x + 2y\end{aligned}$$

Örnek

$\dfrac{\log x + \log y}{\log x - \log y} = 2$ olduğuna göre x in y cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\log x + \log y}{\log x - \log y} = 2$$

$$\Rightarrow \log x + \log y = 2 \cdot (\log x - \log y)$$

$$\log x + \log y = \log x^2 - \log y^2$$

$$\log(x \cdot y) = \log\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$x \cdot y = \frac{x^2}{y^2}$$

$$x = y^3$$

Örnek

$\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[5]{9}}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[5]{9}}\right) = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^{\frac{2}{5}}}\right) = \log_3 3^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}\cdot\log_3 3 = -\frac{2}{5}\cdot 1 = -\frac{2}{5}$$

Aşağıdaki işlemleri hesap makinesi yardımıyla yapıp tabloyu doldurunuz.

$\log_2 20 = ...$	$\dfrac{\log_5 20}{\log_5 2} = ...$
$\log_3 40 = ...$	$\dfrac{\log_6 40}{\log_6 3} = ...$
$\log_2 5 = ...$	$\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2} = ...$

Tabloyu inceleyerek ulaştığınız sonucu açıklayınız.

$a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ dır (taban değiştirme kuralı).

$\log_a b = p$ ve $\log_c a = q$ olsun.

$\log_a b = p \Rightarrow a^p = b$

$\log_c a = q \Rightarrow c^q = a$

$c^q = a \Rightarrow (c^q)^p = a^p \Rightarrow c^{q\cdot p} = b$ olur.

$c^{q\cdot p} = b \Rightarrow \log_c b = q\cdot p \Rightarrow \log_c b = \log_c a\cdot\log_a b \Rightarrow \log_a b = \dfrac{loc_c b}{\log_c a}$ bulunur.

Örnek

$\log_5 3 = x$ ise $\log_3 75$ in x türünden değerini bulalım.

Çözüm

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} \quad \text{(taban değiştirme kuralı)}$$

$$= \frac{\log_5(3.5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + \log_5 5^2}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\cdot\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{x+2}{x} \quad \text{olur.}$$

Örnek

$\dfrac{\log 4}{\log 8} + \dfrac{\ln 2}{\ln 8}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\log 4}{\log 8} = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 8} = \log_8 4, \quad \frac{\ln 2}{\ln 8} = \frac{\log_e 2}{\log_e 8} = \log_8 2$$

$$\frac{\log 4}{\log 8} + \frac{\ln 2}{\ln 8} = \log_8 4 + \log_8 2 = \log_8(4\cdot 2) = \log_8 8 = 1$$

Taban değiştirme kuralı yardımıyla aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

1) $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

2) $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ olmak üzere $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{\log_a b^m}{\log_a a^n} = \frac{m\log_a b}{n\underbrace{\log_a a}_{=1}} = \frac{m}{n}\log_a b$$

3) $a, b, c \dots p \in \mathbb{R}^{+} - \{1\},\ k \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \dots \log_p k = \log_a k$

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \dots \log_p k = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log d}{\log c} \cdots \frac{\log k}{\log p} = \frac{\log k}{\log a} = \log_a k$$

Örnek

$\log_2 3 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 32$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\log_2 3 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 32 = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5$

Örnek

$\log_2 5 \cdot \log_{\sqrt{5}} 36 \cdot \log_6 \sqrt{2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\log_2 5 \cdot \log_{\sqrt{5}} 36 \cdot \log_6 \sqrt{2} = \log_2 5 \cdot \log_{5^{\frac{1}{2}}} 6^2 \cdot \log_6 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2 5 \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}} \cdot \log_5 6 \cdot \frac{1}{2} \log_6 2 = 2 \log_2 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 2 = 2 \log_2 2 = 2$$

Örnek

$\log_{\sqrt{3}} 16 = m$ ve $\log_2 9 = n$ olduğuna göre $\log_{mn} 16$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$m \cdot n = \log_{\sqrt{3}} 16 \cdot \log_2 9 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^4 \cdot \log_2 3^2 = \frac{4}{\frac{1}{2}} \log_3 2 \cdot 2 \log_2 3 = 16 \log_3 2 \cdot \log_2 3 = 16 \log_3 3 = 16$$

Bu durumda $\log_{mn} 16 = \log_{16} 16 = 1$ olur.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a^{\log_a b} = b$ dir.

$\log_a b = t$ olsun.

$a^{\log_a b} = x \Rightarrow a^t = x \Rightarrow t = \log_a x$ olur.

$t = \log_a b$ olduğuna göre

$t = \log_a x \Rightarrow \log_a b = \log_a x$

$b = x$ dir.

$a^{\log_a b} = x \Rightarrow \log_a b = \log_a x$

$b = x$ dir.

$a^{\log_a b} = x$ ise $a^{\log_a b} = b$ olur.

Örnek

$2^{\log_8 125}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$2^{\log_8 125} = 2^{\log_{2^3} 5^3}\ 2^{\frac{3}{3}\log_2 5} = 2^{\log_2 5} = 5$$

Örnek

$(\sqrt{7})^{\log_{49} 3}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}(\sqrt{7})^{\log_{49} 3} &= 7^{\frac{1}{2}\cdot\log_{49} 3} \\ &= 7^{\frac{1}{2}\cdot\log_{7^2} 3} \\ &= 7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_7 3} \\ &= 7^{\frac{1}{4}\log_7 3} \\ &= 7^{\log_7 3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}\end{aligned}$$

Örnek

$a, b, c \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ olmak üzere $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\log_b a = x$ olsun.

$a = b^x$ olur.

$a^{\log_b c} = (b^x)^{\log_b c} = (b^{\log_b c})^x = c^x$ elde edilir. x yerine $\log_b a$ yazalım. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ olur.

Bir gerçek sayının 10 tabanına göre logaritması ardışık iki tam sayı arasındadır.

10 sayısının tam sayı kuvveti olmayan bir sayı p olsun. p sayısı, 10^n ile 10^{n+1} arasında bulunsun.

p sayısının 10 tabanından logaritmasına x diyelim.

$x = \log p \Rightarrow p = 10^x$ olur.

$10^n < p < 10^{n+1} \Rightarrow 10^n < 10^x < 10^{n+1}$

$$n < x < n + 1$$

$$n < \log p < n + 1 \text{ olur.}$$

Tablodaki ifadeleri hesap makinesi yardımıyla bulunuz. Her birinin hangi iki tam sayı arasında olduğunu belirleyerek tabloyu doldurunuz.

$\log 3 = \dots\dots\dots$	$\dots < \log 3 < \dots$
$\log 5 = \dots\dots\dots$	$\dots < \log 5 < \dots$
$\log 125 = \dots\dots\dots$	$\dots < \log 125 < \dots$
$\log 0,002 = \dots\dots\dots$	$\dots < \log 0,002 < \dots$
$\log 0,00059 = \dots\dots\dots$	$\dots < \log 0,00059 < \dots$

Örnek

$\log 1234$ değerinin hangi iki ardışık tam sayı arasında olduğunu bularak tam kısmını yazalım.

Çözüm

$1000 < 1234 < 10\,000$ yazalım.

Bu durumda,

$\log 1000 < \log 1234 < \log 10000$

$\log 10^3 < \log 1234 < \log 10^4$

$3 < \log 1234 < 4$ olur.

Bu durumda $\log 1234$, 3 ile 4 arasında olup $\log 1234 = 3,...$ şeklinde olacaktır.

Buna göre $\log 1234$ ün tam kısmı 3 tür.

Örnek

$\log 0,003$ değerinin tam kısmını bulalım.

Çözüm

$0,001 < 0,003 < 0,01$ yazalım.

$10^{-3} < 0,003 < 10^{-2}$

$\log 10^{-3} < \log 0,003 < \log 10^{-2}$

$-3 < \log 0,003 < -2$

$\log 0,003 = -2,...$ şeklinde olduğundan tam kısmı -2 dir.

1 den büyük bir sayının 10 tabanına göre logaritması pozitif; 0 ile 1 arasındaki bir sayının 10 tabanına göre logaritması negatiftir.

Aşağıdaki işlemleri hesap makinesi yardımıyla yapıp tabloyu doldurunuz.

$\log(1,25) = \ldots\ldots$	$\log\frac{1}{2} = \ldots\ldots$
$\log 2 = \ldots\ldots$	$\log 0,2 = \ldots\ldots$
$\log 3 = \ldots\ldots$	$\log 0,001 = \ldots\ldots$
$\log 4 = \ldots\ldots$	$\log 0,9 = \ldots\ldots$
$\log 125 = \ldots\ldots$	$\log\frac{1}{6} = \ldots\ldots$
$\log(1,125) = \ldots\ldots$	$\log 0,25 = \ldots\ldots$

Bir sayının logaritmasının hangi durumlarda pozitif, hangi durumlarda negatif değer aldıklarını açıklayınız.

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

a) ☐ $\log(a+b) = \log a + \log b$

b) ☐ $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

c) ☐ $\frac{\log a}{\log b} = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

ç) ☐ $\log a^n = n \cdot \log a$

d) ☐ $\log(a \cdot b \cdot c) = \log a + \log b + \log c$

e) ☐ $\log(a-b) = \log a - \log b$

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\log_2 32 + \log_3 9 + \log_5 25$

b) $\ln e + \log 10 - \log 100$

c) $\log 0,1 + \log 0,01$

ç) $\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} 8$

d) $\ln e - \ln\sqrt{e}$

3. $\log 2 = m$ ve $\log 3 = n$ olduğuna göre $\log 75$ i m ve n türünden yazınız.

4. $\log_{12} 4 = x$ olduğuna göre $\log_{16} 108$ i x türünden yazınız.

5. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \ldots \log_{255} 256$ işleminin sonucunu bulunuz.

6. $\ln(a \cdot b) = x$ ve $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = y$ olduğuna göre lna yı x ve y türünden bulunuz.

7. $5^{\log_5 2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

8. $2^{\log_{32} 5}$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. Tablodaki ifadelerin değerlerini bularak noktalı yerlere yazınız.

$2^{\log_2 3} = \ldots\ldots$	$10^{\log 3} = \ldots\ldots$
$4^{\log_4 7} = \ldots\ldots$	$e^{\ln 2} = \ldots\ldots$
$3^{\log_{27} 2} = \ldots\ldots$	$e^{1+\ln 5} = \ldots\ldots$

10. $\log_2 14! = x$ olduğuna göre $\log_2 15!$ ifadesini x cinsinden bulunuz.

11. $\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \cdots + \log\frac{99}{100}$ işleminin sonucunu bulunuz.

12. $\log_3(\log_2 125 \cdot \log_5 8)$ işleminin sonucunu bulunuz.

13. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\log_3 5}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\log_5 3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

14. $\dfrac{1}{\log_2 210} + \dfrac{1}{\log_3 210} + \dfrac{1}{\log_5 210} + \dfrac{1}{\log_7 210}$ işleminin sonucunu bulunuz.

15. Aşağıdaki ifadelerin değerlerinin hangi iki ardışık tam sayı arasında olduklarını bulunuz.

a) $\log 50$ **b)** $\log 200$ **c)** $\log 2014$

ç) $\log 0{,}005$ **d)** $\log 2{,}125$

16. $\log 288$ ifadesinin değerinin hangi iki ardışık tam sayı arasında olduğunu bulunuz.

1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

1.3.1. Üstel, Logaritmik Denklemlerin ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere verilen bir üstel veya logaritmik denklem,

1) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad (f(x) > 0)$

2) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad (f(x) > 0,\ g(x) > 0)$ şeklinde çözülür.

Örnek

$\log_2 (x^2 - 3x) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\log_2 (x^2 - 3x) = 2 \Rightarrow x^2 - 3x = 2^2$$

$$x^2 - 3x = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)\cdot(x-4) = 0$$

$$x + 1 = 0 \ \vee \ x - 4 = 0$$

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 4$$

-1 ve 4 için $x^2 - 3x > 0$ olmalıdır.

$x = -1$ için $(-1)^2 - 3\cdot(-1) = 1 + 3 = 4 > 0$

$x = 4$ için $4^2 - 3\cdot 4 = 4 > 0$ olup $Ç = \{-1, 4\}$ bulunur.

Örnek

$2^{5x-1} = 64$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$2^{5x-1} = 64 \Leftrightarrow 5x - 1 = \log_2 64 \Rightarrow 5x - 1 = 6 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5} \Rightarrow Ç = \left\{\frac{7}{5}\right\}$ tir.

Örnek

$(25)^x - 3\cdot 5^x - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(25)^x - 3\cdot 5^x - 4 = 0 \Rightarrow (5)^{2x} - 3\cdot 5^x - 4 = 0$$

$$(5^x)^2 - 3\cdot 5^x - 4 = 0$$

$5^x = t$ alalım.

$$t^2 - 3\cdot t - 4 = 0$$

$$(t-4)\cdot(t+1) = 0$$

$$t_1 = 4,\ t_2 = -1$$

$5^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_5 4$ ve $5^x = -1 \Leftrightarrow x = \log_5(-1)$ dir.

$\log_5(-1)$ tanımlı değildir. Bu durumda $Ç = \{\log_5 4\}$ olur.

Örnek

$e^x + 4\cdot e^{-x} = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$e^x + 4e^{-x} = 5 \Rightarrow e^x + 4\cdot\frac{1}{e^x} = 5$$

$e^x = t$ alalım. $t + \frac{4}{t} = 5 \Rightarrow t^2 + 4 = 5t$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-4)\cdot(t-1) = 0$$

$$t_1 = 4,\ t_2 = 1$$

$e^x = 4 \Rightarrow x = \log_e 4 = \ln 4$

$e^x = 1 \Rightarrow x = \log_e 1 = \ln 1 = 0$

$Ç = \{0, \ln 4\}$ tür.

Örnek

$3^{x+1} = 2^{x-1}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$3^{x+1} = 2^{x-1} \Rightarrow 3^{x+1} = 2^{x} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 3^{x} \cdot 3 = \frac{2^{x}}{2} \Rightarrow \frac{2^{x}}{3^{x}} = 6 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 6$$

$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 6$ olur. $Ç = \left\{\log_{\frac{2}{3}} 6\right\}$ dır.

Örnek

$(2x-5)^7 = 10$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Her iki tarafın 10 tabanına göre logaritmasını alalım.

$$(2x-5)^7 = 10 \Rightarrow \log(2x-5)^7 = \log 10$$

$$7\log(2x-5) = 1$$

$$\log(2x-5) = \frac{1}{7}$$

$$2x-5 = 10^{\frac{1}{7}}$$

$$2x = 10^{\frac{1}{7}} + 5$$

$$x = \frac{\sqrt[7]{10}+5}{2} \text{ olur. } Ç = \left\{\frac{\sqrt[7]{10}+5}{2}\right\} \text{ dir.}$$

Örnek

$\log(2x-3) = \log 7$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\log(2x-3) = \log 7 \Rightarrow 2x-3 = 7$$

$$2x = 10$$

$$x = 5 \text{ olur.}$$

$2x-3 > 0$ olmalıdır. $x = 5$ değerini $2x-3$ ifadesinde yerine koyarak sağlamasını yapalım.

$x = 5$ için $2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7 > 0$ olduğundan $Ç = \{5\}$ olur.

Örnek

$\log(x+5)-\log(x-1)=1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\log(x+5)-\log(x-1)=1 \Rightarrow \log\left(\frac{x+5}{x-1}\right)=1$$

$$\frac{x+5}{x-1}=10^1$$

$$x+5=10x-10$$

$$9x=15$$

$$x=\frac{15}{9}=\frac{5}{3} \text{ olur.}$$

$x=\frac{5}{3}$ için $x+5=\frac{5}{3}+5>0$ ve $x-1=\frac{5}{3}-1>0$ olduğundan $Ç=\left\{\frac{5}{3}\right\}$ olur.

Örnek

$x^{\ln x}-e^6x=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x^{\ln x}-e^6x=0 \Rightarrow x^{\ln x}=e^6x$ olur.

$$x^{\ln x}=e^6x \Rightarrow \ln(x^{\ln x})=\ln(e^6x)$$

$$\ln x\cdot\ln x=\ln e^6+\ln x$$

$$(\ln x)^2=6\cdot\ln e+\ln x$$

$$(\ln x)^2=6+\ln x$$

$$(\ln x)^2-\ln x-6=0$$

$$(\ln x-3)\cdot(\ln x+2)=0$$

$$(\ln x-3)=0 \vee (\ln x+2=0)$$

$$\ln x=3 \qquad \ln x=-2 \text{ olur.}$$

$\ln x=3 \Rightarrow x=e^3$

$\ln x=-2 \Rightarrow x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ olduğundan $Ç=\left\{\frac{1}{e^2}, e^3\right\}$ olur.

Örnek

$\log_5(\log_2(\log_4 x)) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\log_5(\log_2(\log_4 x)) = 0 \Rightarrow \log_2(\log_4 x) = 5^0$$
$$\log_2(\log_4 x) = 1$$
$$\log_4 x = 2^1$$
$$\log_4 x = 2$$
$$x = 4^2$$
$$x = 16$$

Örnek

$3^{\log_2 x} + 3^{1-\log_2 x} = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3^{\log_2 x} + 3^{1-\log_2 x} = 4 \Rightarrow 3^{\log_2 x} + 3 \cdot 3^{-\log_2 x} = 4 \Rightarrow 3^{\log_2 x} + 3 \cdot \dfrac{1}{3^{\log_2 x}} = 4$ olur.

$3^{\log_2 x} = t$ olsun.

$$t + \frac{3}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$(t-3)(t-1) = 0$$
$$t_1 = 3,\ t_2 = 1$$

$3^{\log_2 x} = 1 \Rightarrow 3^{\log_2 x} = 3^0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 2^0 \Rightarrow x = 1$

$3^{\log_2 x} = 3 \Rightarrow 3^{\log_2 x} = 3^1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$ olduğundan $Ç = \{1, 2\}$ olur.

Örnek

$\left.\begin{array}{r} \log(x \cdot y) = 1 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\log x \cdot y = 1 \Rightarrow x \cdot y = 10^1 \Rightarrow x \cdot y = 10$

$x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x$ olur. Buna göre

$x \cdot y = 10 \Rightarrow x \cdot (7 - x) = 10$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 5) \cdot (x - 2) = 0$

$(x - 5 = 0) \vee (x - 2 = 0)$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = 2$

$x = 5$ için $y = 7 - x = 7 - 5 = 2$ ise $(x, y) = (5, 2)$

$x = 2$ için $y = 7 - x = 7 - 2 = 5$ ise $(x, y) = (2, 5)$

$Ç = \{(2,5), (5,2)\}$ olur.

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ eşitsizliğinde,

1) $a > 1$ ise $f(x) > g(x)$

2) $0 < a < 1$ ise $f(x) < g(x)$ tir.

Örnek

$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{4}{25}\right)^{-2x-1}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{4}{25}\right)^{-2x-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot(-2x-1)}$

$2x + 1 \leq -4x - 2$

$6x \leq -3$

$x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow Ç = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ olur.

Örnek

$(5^{x+1}-125)\cdot(x^2-9)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

1. yol

$5^{x+1}-125=0 \Rightarrow 5^{x+1}=125$

$5^{x+1}=5^3$

$x+1=3$

$x_1=2$

$x^2-9=0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+3)=0$

$x_2=3 \qquad x_3=-3$

	$-\infty$	-3	2	3	$+\infty$
$(5^{x+1}-125)\cdot(x^2-9)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$Ç=(-3,2)\cup(3,\infty)$

2. yol

1. durum

$5^{x+1}-125>0 \quad \wedge \quad x^2-9>0$ olur.

$5^{x+1}>125 \qquad x^2>9$

$5^{x+1}>5^3 \qquad \sqrt{x^2}>\sqrt{9}$

$x+1>3 \qquad |x|>3$

$x>2 \qquad (x<-3)\vee(x>3)$ ise $Ç_1=(3,\infty)$ olur.

2. durum

$5^{x+1}-125<0 \quad \wedge \quad x^2-9<0$ olur.

$5^{x+1}<125 \qquad x^2<9$

$5^{x+1}<5^3 \qquad \sqrt{x^2}<\sqrt{9}$

$x+1<3 \qquad |x|<3$

$x<2 \qquad -3<x<3$ ise $Ç_2=(-3,2)$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2=(-3,2)\cup(3,\infty)$ bulunur.

Logaritmalı eşitsizlikler çözülürken;

$a>1$ için $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$

$0<a<1$ için $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$ özelliklerinden yararlanılır.

Örnek

$\log_2(x-6) > 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\log_2(x-6) > 4 \Rightarrow \log_2(x-6) > \log_2 2^4$

$\Rightarrow (x-6 > 2^4) \wedge (x-6 > 0)$ olmalıdır. Buna göre

$(x-6 > 16) \quad \wedge \quad (x > 6)$

$x > 22$ olduğundan $Ç = (22, \infty)$ dır.

Örnek

$\log_{\frac{1}{4}}(x-1) > 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\log_{\frac{1}{4}}(x-1) > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x-1) > \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(x-1 < \frac{1}{4}\right) \wedge (x-1 > 0)$

$\Rightarrow \left(x < \frac{5}{4}\right) \wedge (x > 1)$ olur.

$0 < \frac{1}{4} < 1$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir.

Buna göre $Ç = \left(1, \frac{5}{4}\right)$ olur.

Örnek

$1 \le \log_2(x+5) < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$1 \le \log_2(x+5) < 3 \Rightarrow \log_2 2 \le \log_2(x+5) < \log_2 2^3$

$2 \le x+5 < 8$

$-3 \le x < 3$ olur.

Buna göre $Ç = [-3, 3)$ dır.

Örnek

$\log_2(x-5)+\log_2(x+5)\le 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\log_2(x-5)+\log_2(x+5)\le 6 \Rightarrow \log_2(x-5)\cdot(x+5)\le 6$$
$$\log_2(x^2-25)\le 6$$
$$x^2-25\le 2^6 \Rightarrow x^2-25\le 64 \Rightarrow x^2\le 89$$
$$\Rightarrow |x|\le\sqrt{89} \Rightarrow -\sqrt{89}\le x\le\sqrt{89}$$

Ayrıca, $(x-5>0)\wedge(x+5>0)$ olmalıdır. Buradan $(x>5)\wedge(x>-5)$ olup $x>5$ bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} -\sqrt{89}\le x\le\sqrt{89} \\ x>5 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin kesişimi alınırsa $5<x\le\sqrt{89}$ olur. $Ç=(5,\sqrt{89}]$ bulunur.

Örnek

$\log_2\dfrac{x+1}{x-2}<1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\log_2\frac{x+1}{x-2}<1 \Rightarrow \log_2\frac{x+1}{x-2}<\log_2 2$$
$$\Rightarrow\left(\log_2\frac{x+1}{x-2}<1\right)\wedge\left(\frac{x+1}{x-2}>0\right)$$
$$\Rightarrow\left(\frac{x+1}{x-2}<2\right)\wedge\left(\frac{x+1}{x-2}>0\right) \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{x+1}{x-2}<2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-2<0 \Rightarrow \frac{-x+5}{x-2}<0 \Rightarrow -x+5=0 \Rightarrow x=5$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$ -1	-1 2	2 5	5 $+\infty$
$\frac{x+1}{x-2}>0$	+	−	+	+
$\frac{-x+5}{x-2}<0$	−	−	+	−

($x=2$: tanımsız; $x<-1$ ve $x>5$ aralıkları: çözüm kümesi)

$Ç=(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ olur.

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $2^{x+1} = 7$ **b)** $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$ **c)** $4^x - 2^x - 6 = 0$ **ç)** $e^x - 6e^{-x} - 1 = 0$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\log_2(3x-2) = 5$ **b)** $\log_5(x+3) = \log_5(x^2 - x)$

c) $e^4 = x^{\ln x}$ **ç)** $\log(4x-8) + \log x = 4$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$ **b)** $16^x + 4^x - 12 = 0$

c) $\log_2(x-1) - \log_2(x-2) = 4$ **ç)** $\log_5(x-1) + \log_5(x-3) = 1$

4. $\log_2[2 + 2\log_3(2x-1)] = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $\log 8 - 2\log x = \log x + \log\frac{1}{x^2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $\log_3 x + \log_3(3x+2) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $2^{x+1} < 2^{-2x-3}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 2^{2x-1}$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > 2$

ç) $|\log_2(x-3)| < 4$ **d)** $1 < \log_5(x-1) \leq 2$

8. $0 < \log_2(x-5) \leq 4$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

9. $x^{\ln x} - e^{12}x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $2^{\log x} = 5^{\log 2}$ ise x kaçtır?

11. $\left.\begin{array}{l} \log xy^3 = 3 \\ \log\frac{x^2}{y} = -8 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

12. $\log_2(4-x) + \log_2(x+1) \geq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

1.3.2. Üstel ve Logaritmik Fonksiyon Problemleri

Depremler, Dünya'nın var oluşundan beri can kayıplarına yol açmış ve günümüzde de can kayıplarına neden olmaya devam eden bir doğal afet türüdür. Bilim insanları, depremin nedenlerini araştırıp can kayıplarını azaltabilmek için çalışmalar yapmaktadır. Charles F. Richter (Çarls F. Rihter), sismograf makinesi ile zemin hareketlerini ölçmüş ve bilim çevresinde saygın bir yer edinmiştir.



Sismograf makinası



Charles F. Richter, dış merkezden 100 km uzaklıkta ve sert zemine yerleştirilmiş özel bir sismografla kaydedilmiş zemin hareketinin mikron (1 mikron 1/1000 mm) cinsinden ölçülen maksimum genliğin 10 tabanına göre logaritmasını depremin büyüklüğü olarak hesaplamıştır. Rihter ölçeği logaritmik olduğundan ölçekteki her tamsayı farklı deprem genliğinde 10 kat artışa denk gelir.

Bilim insanları bir dinozor fosilinin kemiğini inceleyerek bu dinozorun kaç yıl önce yaşadığını tespit edebilmektedirler. Canlı iken kemikte bulunan karbon 14 adıyla anılan atomlar canlının ölümünden sonra düzenli olarak bozunarak karbon 12 atomuna dönüşürler. 5736 yılda bozunmayan karbon 14 atomlarının sayısı yarıya iner. Diğer yarısı karbon 12 atomu hâline dönüşür. Bu süreye yarılanma süresi denir. Kemik fosilindeki bu iki cins atomun miktarları ölçülerek dinozorun yaklaşık olarak kaç yıl önce öldüğü anlaşılabilmektedir. Yarı ömür, azalmakta olan bir maddenin başlangıçtaki miktarının yarısına düşmesi için geçen zamandır.

Kaynak: Ana Britannica Ansiklopedisi

Örnek

Genliği 22 mm olarak ölçülen depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü hesaplayalım.

Çözüm

22 mm yi öncelikle mikrona çevirelim. 1 mikron $\frac{1}{1000}$ mm olduğundan 22 mm, 22 000 mikrondur.

22 000 in 10 tabanına göre logaritmasını alalım.

$\log 22\,000 \cong 4,34242$

olduğundan Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü yaklaşık 4,3 olur.

Örnek

Bir okulda tasarruf bilinci oluşturmak isteyen bir öğrenci grubu çevre okulların su tasarrufu yapmaları için çalışmalarda bulunuyor. Birinci ay 1000 litre tasarruf yapılmasını sağlayan öğrenci grubu her ay bir önceki ay içerisinde yapılan tasarrufun iki katı kadar tasarruf yapılmasını sağlıyor. Buna göre 10. ayda ne kadar su tasarrufu yapılmış olur?

Çözüm

Başlangıçtaki su tasarrufu 1000 litre olduğuna göre

$y(1) = 1000$ dir.

2. ay $y(2) = 2 \cdot y(1) = 2 \cdot 1000$

3. ay $y(3) = 2 \cdot y(2) = 2 \cdot 2 \cdot 1000 = 2^2 \cdot 1000$

4. ay $y(4) = 4 \cdot y(3) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1000 = 2^3 \cdot 1000$

$\vdots$

t. ay $y(t) = 2^{t-1} \cdot 1000$ olacaktır.

Buna göre 10. ay yapılan su tasarrufu,

$2^9 \cdot 1000 = 512000$ litre olur.

Örnek

Bir radyoaktif maddenin bozunma hızı saatte %2 dir. 8 saat sonra bu maddenin yüzde kaçı kalır?

Çözüm

Saat	Kalan yüzde
0	100
1	$100 \cdot 0,98$
2	$100 \cdot 0,98 \cdot 0,98$
$\vdots$	$\vdots$
n	$100 \cdot (0,98)^{n-1}$

n saat sonra ne kadar madde kaldığını görmek için bir formül yazmaya çalışalım. Bunun için geçen zaman ve kalan yüzdeyi gösteren bir tablo çizelim. Başlangıçtaki madde miktarını 100 alalım.

1 saat sonra kalan madde, $100 - 100 \cdot \frac{2}{100} = 98$ dir.

$$98 = 100 \cdot \frac{98}{100}$$

$$= 100 \cdot 0,98 \text{ yazılabilir.}$$

2 saat sonra kalan madde, $100 \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{98}{100} = 100 \cdot (0,98) \cdot (0,98)$ olur. Bu şekilde devam edecek olursak n saat sonra kalan madde,

$$100 \cdot \underbrace{(0,98) \cdot (0,98) \ldots (0,98)}_{\text{n tane}} = 100 \cdot (0,98)^n \text{ dir.}$$

Buna göre 8 saat sonunda kalan maddeyi bulmak için elde edilen formülde n yerine 8 yazalım. Bunun için hesap makinesinden yararlanabiliriz.

8 saat sonunda radyoaktif maddenin yaklaşık $100 \cdot (0,98)^8 \approx 85$ olduğundan %85 i kalmıştır.

Örnek

Kağan, afet bölgesindeki yardıma muhtaç insanlara para göndermek için okullarına konulan yardım sandığına ilk gün 1 TL den başlayarak her gün bir önceki gün sandığa attığı paranın 2 katı kadar para atıyor. 7 günün sonunda yardım sandığına toplam kaç TL para atmış olur?

Çözüm

Başlangıçta 1 TL almıştır.

$y(1) = 1$ dir.

2. gün $y(2) = 2 \cdot y(1) = 2 \cdot 1 = 2^1 = 2$

3. gün $y(3) = 2 \cdot y(2) = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$

4. gün $y(4) = 2 \cdot y(3) = 2 \cdot 4 = 2^3 = 8$

$\vdots$

7. gün $y(7) = 2 \cdot y(6) = 2^6 = 64$ olacaktır.

Buna göre 7 gün sonunda toplam, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ TL para atmış olur.

Örnek

Bir bakteri türü her saatte iki katına çıkmaktadır. Başlangıçtaki bakteri sayısı 1000 olduğuna göre kaç saat sonra bu bakteri türünün sayısı, başlangıçtakinin 100 katına çıkacaktır?

Çözüm

Başlangıçtaki bakteri sayısı 1000 olduğuna göre $y(0) = 1000$ dir.

1 saat sonra $y(1) = 2 \cdot y(0) = 2 \cdot 1000$

2 saat sonra $y(2) = 2 \cdot y(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1000 = 2^2 \cdot 1000$

3 saat sonra $y(3) = 2 \cdot y(2) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1000 = 2^3 \cdot 1000$

$\vdots$

t saat sonra $y(t) = 2^t \cdot 1000$ olacaktır.

Buna göre $2^t \cdot 1000 = 100 \cdot 1000$ olmasını istiyoruz.

$$2^t = \frac{100 \cdot 1000}{1000}$$

$$2^t = 100$$

$$\log 2^t = \log 100 \Rightarrow t \cdot \log 2 = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{\log 2} \approx 6,64385 \text{ olur.}$$

Örnek

Bir bakteri kolonisinde başlangıçta 100 hücre vardır. Koloni mevcut sayıya göre üstel bir hızla büyümektedir. Saatte %4 oranında artan bakteri kolonisinde 6 saat sonunda yaklaşık kaç bakteri olur?



Çözüm

1 saat sonunda bakteri sayısı

$$100 + 100 \cdot \frac{4}{100} = 100 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)$$

$$= 100 \cdot 1{,}04$$

2 saat sonunda bakteri sayısı

$$= 100 \cdot (1{,}04) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)$$

$$= 100 \cdot (1{,}04) \cdot (1{,}04)$$

n saat sonunda bakteri sayısı

$$= 100 \cdot \underbrace{(1{,}04) \cdot (1{,}04) \ldots (1{,}04)}_{\text{n tane}}$$

$= 100 \cdot (1{,}04)^n$ olur.

Saat	Bakteri sayısı
0	100
1	$100 \cdot (1{,}04)$
2	$100 \cdot (1{,}04)^2$
⋮	⋮
n	$100(1{,}04)^n$

6 saat sonunda bakteri sayısını bulabilmek için elde edilen formülde n yerine 6 yazmalıyız.

$n = 6$ için $100 \cdot (1{,}04)^6 \approx 127$ olur.



Örnek

Yarı ömrü 40 yıl olan 10 gr maddenin 120 yıl sonra ne kadar kalacağını bulalım.

($t_{1/2}$: Yarılanma ömrü, A: Başlangıçtaki madde miktarı, n: Geçen zaman (yıl), B: Kalan madde miktarı olmak üzere $B = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_{1/2}}}$ dir.)

Çözüm

$t_{1/2} = 40$ yıl, A: 10 gram, n: 120 yıl, B: kalan madde miktarı

$$B = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_{1/2}}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{40}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 10 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = 1,25 \text{ gram}$$

Örnek

Bir radyoaktif izotopun 24 gün sonra başlangıçtaki miktarının $\frac{1}{8}$ i kaldığına göre bu izotopun yarılanma ömrünü bulalım.

Çözüm

Başlangıçtaki madde A ise kalan madde $B = \frac{A}{8}$, $n = 24$ gün,

$$B = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_{1/2}}} \Rightarrow \frac{A}{8} = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{t_{1/2}}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{t_{1/2}}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(2^{-1}\right)^{\frac{24}{t_{1/2}}} = 2^{-3} \Rightarrow -\frac{24}{t_{1/2}} = -3 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{24}{3} = 8 \text{ gün olur.}$$

Örnek

Bir araştırma sonucu üzerinde %10 karbon 14 içeren bir fosil bulunuyor. Bu fosilin yarılanma ömrü 5736 yıl olduğuna göre yaklaşık yaşını bulalım.

($t_{1/2}$: Yarılanma ömrü, n: Karbon 14'ün canlı dokudaki miktarına oranı, Fosil yaşı $= Y(n) = -\frac{\ln(n)}{0,693} \cdot t_{1/2}$)

Çözüm

n: %10 = 0,1

$t_{1/2}$: 5736 (fosilin yarılanma ömrü) yaşındadır.

$$Y(n) = -\frac{\ln(0,1)}{0,693} \cdot 5736 \approx -\frac{-2,30}{0,693} \cdot 5736 \approx 19\,037$$

UYGULAYALIM

1. Bir ilin nüfusu yaklaşık olarak

$N(t) = 300\,000 \cdot e^{0,025 \cdot (t-2\,000)}$ formülü ile verilmiştir. (t yılı göstermektedir.)

Kaç yıl sonra ilin nüfusu, 2 000 yılındaki nüfusun 2 katını geçer?

2. Richter ölçeğine göre 5 büyüklüğündeki bir depremin genliği yaklaşık kaç mm dir?

3. Bir ortamda bulunan bakterilerin sayısının zamana göre değişimi (dakika olarak), $Q(t) = Q_0 \cdot e^{0,04t}$ şeklinde modellenmiştir. Q_0, başlangıçtaki bakteri sayısı ve t zaman olmak üzere bakteri sayısının 500 den 20000 e çıkması için kaç dakika geçmelidir?

4. Bir bakteri türü her saatte 3 katına çıkmaktadır. Başlangıçtaki bakteri sayısı 100 000 olduğuna göre kaç saat sonra bu bakteri türünün sayısı başlangıçtakinin 100 katına çıkacaktır?

5. Nüfusu 500 000 olan bir ilin yıllık nüfus artış yüzdesi %10 olarak belirlenmiştir. Kaç yıl sonra bu ilin nüfusu başlangıçtaki nüfusunun 2 katı olacaktır?

6. Yarı ömrü 120 yıl olan 20 gramlık bir maddenin 2400 yıl sonra ne kadar kalacağını bulunuz.

7. Yarı ömrü 360 yıl olan 40 gramlık bir maddenin 3600 yıl sonra ne kadar kalacağını bulunuz.

Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz.

1. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{25}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 5 E) 25

2. $\log_5 3 \cdot \log_9 125$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

3. $\log_2 [\log_5 (\log_2 32)]$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

4. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 ... \log_{127} 128$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

5. $\log_2 [15 + \log_5 (8 - \log_3 27)]$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. $\log_3 5 = m$ olduğuna göre $\log_5 15$ ifadesinin değeri nedir?

A) $\frac{m+1}{m}$ B) $m+1$ C) $\frac{m+1}{2m}$ D) $\frac{m-1}{2}$ E) $\frac{1}{m-1}$

7. $\log(m+n) = \log m + \log n$ olduğuna göre m nin n türünden değeri nedir?

A) $\frac{n+1}{n}$ B) $\frac{n}{n-1}$ C) $\frac{n}{n+1}$ D) $n+1$ E) $\frac{n+1}{n-1}$

8. $\frac{1}{\log_2 8} + \frac{1}{\log_4 8}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

9. $\log_5 (\log_5 x) = 2$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 5 B) 125 C) 5^5 D) 5^{25} E) 10^{25}

10. $\log(3x+2)+\log x=0$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

11. $\log_2(\log_3(5x+4))=1$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

12. $\frac{1}{\log_4 24}+\frac{2}{\log_{\sqrt{2}} 24}+\frac{4}{\log_{4\sqrt{3}} 24}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

13. $\log_3(9\cdot 3^{x+2})=2x$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2\}$ B) $\{4\}$ C) $\{6\}$ D) $\{8\}$ E) $\{10\}$

14. $6e^{-x}+e^{x}-5=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\ln 2\}$ B) $\{\ln 3\}$ C) $[0,\ln 2]$ D) $\{\ln 2, \ln 3\}$ E) 1

15. $\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} x=\log_2 27$ denkleminin kökü kaçtır?

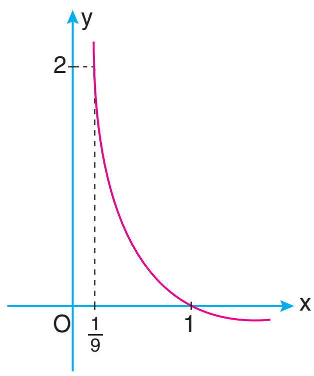
A) 3 B) 4 C) 5 D) 9 E) 27

16. $\frac{1}{\log_2 40}+\frac{1}{\log_4 40}+\frac{1}{\log_5 40}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) 16

17. Yandaki grafik, $f(x)=\log_a x$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $f(9)+f(27)$ nin değeri kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5



18. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıdaki üstel fonksiyonlardan hangisi azalandır?

A) $f(x)=9^x$ B) $f(x)=4^x$ C) $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ D) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$ E) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

19. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıdaki üstel fonksiyonlardan hangisi artandır?

A) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ B) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ C) $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ D) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{-x}$ E) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

20. Nüfusu 200 000 olan bir ilin nüfus artış yüzdesi ortalama %1 olarak belirlenmiştir. 8 yıl sonra bu ilin nüfusu yaklaşık kaç olur?

A) 215 325 B) 216 571 C) 219 000 D) 220 224 E) 275 782

21. Bir bakteri türü her saat sonunda 4 katına çıkmaktadır. Başlangıçtaki bakteri sayısı 200 olduğuna göre 10 saat sonra bu bakteri türünün sayısı kaç olur?

A) 209 715 200 B) 2 120 000 C) 315 125 375 D) 325 225 475 E) 416 732 025

22. Bir radyoaktif maddenin bozulma hızı saatte %4 tür. 12 saat sonra bu maddenin yaklaşık yüzde kaçı kalır?

A) 60,250 B) 61,271 C) 62,374 D) 65,432 E) 68, 195

23. 2004 yılında Funda'nın bir bankada 4000 TL parası vardır. Paranın yıllık artış oranı %10 olduğuna göre 2016 yılında Funda'nın bankada yaklaşık kaç TL parası olur?

A) 12 400 B) 12 450 C) 12 554 D) 12 652 E) 14 000

24. Richter ölçeğine göre 100 km uzaklıktaki 5,4 şiddetindeki bir deprem yaklaşık kaç mm genlik üretir?

A) 100 B) 125 C) 251 D) 272 E) 350

25. Bir kolonide bulunan bakteri sayısı B_0 dır. t(sa.) zaman sonraki bakteri sayısı $B(t) = B_0 \cdot 2^{3t}$ formülü ile veriliyor.

Buna göre başlangıçta 128 bakteri varsa 3 saat sonra bakteri sayısı kaç olur?

A) 2^{16} B) 2^{12} C) 2^{10} D) 2^9 E) 2^5

26. Bir radyoaktif madde bozunmaya uğrayarak t (ay) sonra kalan madde miktarı $B(t) = 30 \cdot (1,2)^{-2t}$ (g) formülü ile modellenirse 4 ay sonraki radyoaktif ölçümde madde miktarı yaklaşık olarak kaç g dır?

A) 22,97 B) 16,98 C) 11,94 D) 6,97 E) 2,96

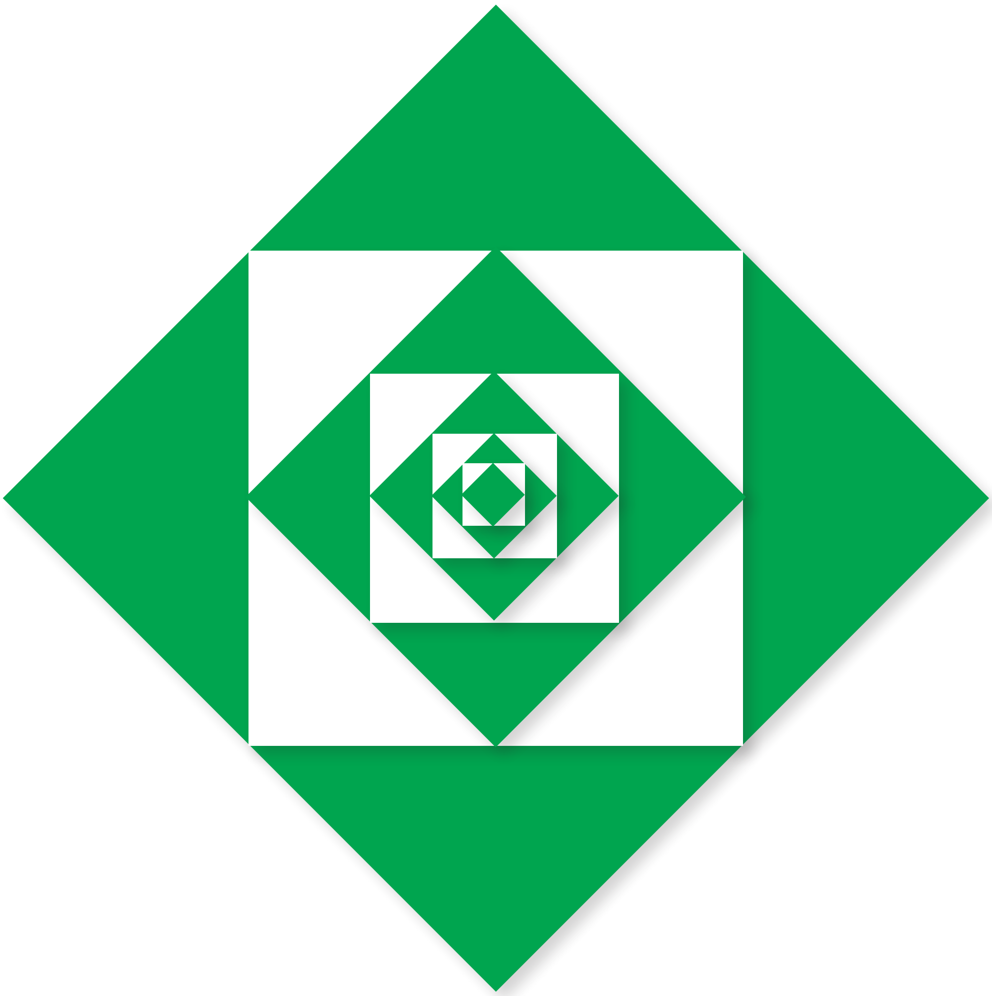
SAYILAR VE CEBİR

DİZİLER

2. ÜNİTE

2. DİZİLER

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ



2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

Matematikte kullanılan dizi sözcüğü ile günlük hayatta kullanılan dizi sözcüğü aslında birbirinden çok farklı değildir.



“Satranç taşlarını, taşlar arasında belirli bir mesafe bırakarak satranç tahtasına dizmek”

“Bilardo toplarını, her sıradaki top sayısı belirli bir oranda artacak şekilde dizmek”

“Bardakları sabit aralıklarla ikişer ikişer rafa dizmek” ifadeleri dizi sözcüğünün günlük hayatta kullanılan örnekleridir.

$\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$\{5, 10, 15, 20, ...\}$

kümelerinin elemanlarının oluşturduğu dizilim ise dizi sözcüğünün matematiksel anlamda kullanılan örnekleridir.

Her iki örnekte de nesnelerin veya sayıların belirli bir kurala göre dizilimi söz konusudur.

2.1.1. Dizi Kavramı

$A \neq \varnothing$ olmak üzere $f: \mathbb{Z}^+ \to A$ tanımlı her fonksiyona **dizi** denir. Diğer bir ifadeyle tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan her fonksiyona **dizi** denir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = a_n$ ifadesine dizinin n. terimi veya **genel terimi** denir.

$A = \mathbb{R}$ ise diziye **reel sayılar dizisi** denir.

Bir reel sayı dizisi,

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}$ veya $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ şeklinde gösterilir. a_1, a_2, a_3 reel sayılarına sırasıyla dizinin **birinci, ikinci ve üçüncü terimi** denir.

Dizi genel terimleri ile belirlidir. Genel terimleri verilmeden yazılan sayı grupları dizi belirtmez.

Örnek

$f:\mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{R},\ f(n) = 2n$ fonksiyonunun bir dizi belirtip belirtmediğini gösterelim.

Çözüm

$f:\mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{R},\ f(n) = 2n$ fonksiyonu için

$f(1) = 2$

$f(2) = 4$

$f(3) = 6$

$\vdots$

$f(n) = 2n$

$\vdots$

olduğundan $(a_n) = (2n) = (2, 4, 6, ..., 2n, ...)$ şeklindedir.

Buna göre $f:\mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{R},\ \ f(n) = 2n$ fonksiyonu genel terimi $a_n = 2n$ olan bir dizidir.

Örnek

$f(n) = \dfrac{2n+5}{n-4}$ fonksiyonunun bir dizi belirtip belirtmediğini gösterelim.

Çözüm

Bir fonksiyonun dizi belirtmesi için tanım kümesinin $\mathbb{Z}^{+}$ olması gerekir.

$n = 4$ için $f(n) = \dfrac{2n+5}{n-4}$ tanımsız olduğundan $f(n)$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{Z}^{+}$ değildir.

Dolayısıyla $f(n) = \dfrac{2n+5}{n-4}$ fonksiyonu bir dizi belirtmez.

Örnek

$(3, 6, 9, ...)$ ifadesinin bir dizi belirtip belirtmediğini gösterelim.

Çözüm

$(3, 6, 9, ...)$ ifadesinde genel terim verilmediğinden bu ifade bir dizi belirtmez.

Bu dizide 4. terim 12 olmak zorunda değildir. $a_n = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3) + 3n$

genel terimli bir dizinin de ilk üç terimi 3, 6, 9 dur. Ancak 4. terimi 18 olur.

$(3, 6, 9, ...)$ ifadesinde 3. terimden sonraki terimleri genel terim olmadan bilemeyiz. Dolayısıyla bu ifade bir dizi belirtmez.

Örnek

$f(n)=\dfrac{n^2-1}{n}$ ifadesinin bir dizi belirtip belirtmediğini gösterelim.

Çözüm

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n)$ tanımlı olduğundan $f(n)=\dfrac{n^2-1}{n}$ bir dizidir.

Sonlu Dizi

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $A_k=\{1,2,3,...,k\} \subset \mathbb{Z}^+$ olmak üzere tanım kümesi A_k olan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

Örnek

$(a_n)=\left(\dfrac{n+2}{n-5}\right)$ ifadesinin bir sonlu dizi belirtmesi için terim sayısının en fazla kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm

$a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R},\ a_3 \in \mathbb{R}, a_4 \in \mathbb{R}, a_5 \notin \mathbb{R}$ olduğundan

$A_4=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere

$a_n: A_4 \rightarrow \mathbb{R}$ sonlu dizisi tanımlıdır.

Dolayısıyla bu sonlu dizinin terim sayısı en çok 4 olabilir.

Sonlu dizi olduğu belirtilmediği sürece her dizinin sonsuz dizi olduğu anlaşılmalıdır.

Sabit Dizi

Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere **sabit dizi** denir. (a_n) sabit dizi ise

$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = c \quad (c \in \mathbb{R})$ dir.

Örnek

$(a_n) = \left(\frac{3n-k}{4n+1}\right)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre k değerini bulalım.

Çözüm

1. yol

(a_n) sabit dizi ise $a_1 = a_2$ dir. $a_1 = \frac{3-k}{4+1}$ ve $a_2 = \frac{6-k}{8+1}$ olduğuna göre

$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{3-k}{4+1} = \frac{6-k}{8+1} \Rightarrow 27-9k = 30-5k \Rightarrow -4k = 3 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$ bulunur.

2. yol

Dizi, tanım kümesi sayma sayıları olan bir fonksiyondur. (a_n) dizisi bir fonksiyon olduğuna göre fonksiyonun özellikleri dizi için de kullanılabilir.

$\left(\frac{3n-k}{4n+1}\right)$ dizisinin sabit dizi olması için pay ve paydadaki aynı dereceli terimlerin katsayılarının oranı birbirine eşit olmalıdır. Buna göre

$\frac{3}{4} = \frac{-k}{1} \Rightarrow -4k = 3 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$ olur.

Örnek

$(a_n) = (\cos 2n\pi)$ dizisinin sabit dizi olduğunu gösterelim.

Çözüm

$a_1 = \cos 2\pi = 1$

$a_2 = \cos 4\pi = 1$

$a_3 = \cos 6\pi = 1$

$\vdots \qquad \vdots$

$(a_n) = (1, 1, 1, ...)$ olduğundan $(a_n) = (\cos 2n\pi)$ sabit dizidir.

Dizilerin Eşitliği

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ oluyorsa (a_n) ve (b_n) dizileri birbirine eşittir. Bu durum $(a_n) = (b_n)$ şeklinde gösterilir.

Örnek

$(a_n) = (\cos n\pi)$ dizisinin $(b_n) = ((-1)^n)$ dizisine eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm

$(a_n) = (\cos n\pi) = (-1, 1, -1, 1, ...)$ $\quad (a_1 = \cos \pi = -1,\ a_2 = \cos 2\pi = 1, ...)$

$(b_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, ...)$ $\quad (b_1 = (-1)^1 = -1,\ b_2 = (-1)^2 = 1, ...)$

Buna göre

$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3, ..., a_n = b_n, ...$ olduğundan

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a_n) = (b_n)$ dir.

Genel Terimi veya İndirgeme Bağıntısı Verilen Bir Dizinin Terimleri

Genel terimi a_n olan bir dizide, n yerine terim numarası yazılarak dizinin terimi bulunur.

Örnek

$(a_n) = \left(\frac{n-3}{n+2}\right)$ dizisinin birinci ve beşinci terimini, genel terimini ve aynı dizinin kaçıncı teriminin $\frac{1}{6}$ olduğunu bulalım.

Çözüm

$a_1 = \frac{1-3}{1+2} = -\frac{2}{3}, \quad a_5 = \frac{5-3}{5+2} = \frac{2}{7}$ olur.

Genel terimi $a_n = \frac{n-3}{n+2}$ dir.

Dizinin k. terimi $a_k = \frac{k-3}{k+2} \Rightarrow \frac{k-3}{k+2} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6k - 18 = k + 2$

$$5k = 20$$

$$k = 4 \text{ olur.}$$

Buna göre dizinin 4. terimi $\frac{1}{6}$ dır.

Örnek

Genel terimi $a_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{3n-1}$ olan dizinin ilk üç teriminin toplamını bulalım.

Çözüm

$a_1 = \frac{(-1)^{2\cdot1+1}}{3\cdot1-1} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{(-1)^{2\cdot2+1}}{3\cdot2-1} = -\frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{(-1)^{2\cdot3+1}}{3\cdot3-1} = -\frac{1}{8}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{-20-8-5}{40} = -\frac{33}{40}$$

Örnek

Bir (a_n) dizisinde $a_1 = 4$ ve $a_{n+1} = 6n + a_n$ olduğuna göre bu dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
n = 1 &\Rightarrow a_2 = 6 + a_1 \\
n = 2 &\Rightarrow a_3 = 12 + a_2 \\
n = 3 &\Rightarrow a_4 = 18 + a_3 \\
&\vdots \\
n = n-1 &\Rightarrow a_n = 6\cdot(n-1) + a_{n-1}
\end{aligned}$$

$+$

$$\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + a_n = 6\cdot(1+2+3+\dots+(n-1)) + a_1 + \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n = 6\cdot(1+2+3+\dots+(n-1)) + a_1$$

$$a_n = 6\cdot\frac{((n-1)\cdot(n-1+1))}{2} + a_1$$

$$a_n = 3\cdot(n-1)\cdot n + \underbrace{a_1}_{4}$$

$$a_n = 3n^2 - 3n + 4 \quad \text{olur.}$$

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanan dizilere **indirgemeli dizi,** tanımlama bağıntısına da **indirgeme bağıntısı** denir.

Örnek

Bir (a_n) dizisinde $a_{n+1} = 2^n \cdot a_n$ ve $a_3 = 2$ olduğuna göre a_{40} değerini bulalım.

Çözüm

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2^3 \cdot a_3$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 2^4 \cdot a_4$$
$$n = 5 \Rightarrow a_6 = 2^5 \cdot a_5$$
$$\vdots$$
$$\times \quad n = 39 \Rightarrow a_{40} = 2^{39} \cdot a_{39}$$

$$\cancel{a_4} \cdot \cancel{a_5} \cdot \cancel{a_6} \ldots \cancel{a_{39}} \cdot a_{40} = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \ldots 2^{39} \cdot a_3 \cdot \cancel{a_4} \cdot \cancel{a_5} \ldots \cancel{a_{39}}$$
$$a_{40} = 2^{2+3+4+5+\ldots+39} \cdot a_3$$
$$a_{40} = 2^{779} \cdot a_3$$
$$a_{40} = 2^{779} \cdot 2 = 2^{780}$$

Örnek

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n+1} = a_n + 2$ ve $a_3 = 6$ ise a_{20} değerini bulalım.

Çözüm

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + 2$$
$$n = 5 \Rightarrow a_6 = a_5 + 2$$
$$\vdots$$
$$+ \quad n = 19 \Rightarrow a_{20} = a_{19} + 2$$

$$\cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \cancel{a_6} + \ldots + \cancel{a_{19}} + a_{20} = a_3 + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \cancel{a_6} + \ldots + \cancel{a_{19}} + 2 \cdot 17$$
$$a_{20} = a_3 + 2 \cdot 17$$
$$a_{20} = 6 + 34$$
$$a_{20} = 40$$

Örnek

Genel terimi $a_n = \dfrac{3n-5}{2n-11}$ olan dizinin kaç teriminin negatif olduğunu bulalım.

Çözüm

$\dfrac{3n-5}{2n-11} < 0$ eşitsizliğini çözelim. $3n-5=0 \Rightarrow n=\dfrac{5}{3}$

$$2n-11=0 \Rightarrow n=\frac{11}{2}$$

	$-\infty$	$\frac{5}{3}$		$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$\frac{3n-5}{2n-11} < 0$	+	0	−	tanımsız	+

$n \in \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{11}{2}\right)$ için $\dfrac{3n-5}{2n-11}$ negatiftir.

Bu aralıktaki sayma sayıları 2, 3, 4 ve 5 olduğundan (a_n) dizisinin 4 terimi negatiftir.

Örnek

Genel terimi $a_n = \dfrac{4n^2-4n+5}{n+1}$ olan dizinin kaç teriminin tam sayı olduğunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4n^2-4n+5 & n+1 \\ \cline{3-3}
- & 4n^2+4n & 4n-8 \\ \hline
 & -8n+5 & \\
- & -8n-8 & \\ \hline
 & 13 &
\end{array}$$

$$\frac{4n^2-4n+5}{n+1} = 4n-8+\frac{13}{n+1} \text{ olur.}$$

$4n-8+\dfrac{13}{n+1}$ ifadesinde $n \in \mathbb{Z}^+$ için $4n-8$ tam sayıdır. Bu durumda, $\dfrac{13}{n+1}$ ifadesini tam sayı yapan sayma sayılarını bulalım.

n; 12 değerini aldığında $\dfrac{13}{n+1}$ tam sayı olduğundan (a_n) dizisinin 1 terimi tam sayıdır.

Örnek

$(a_n) = (n^2 - 4n - 5)$ dizisinin en küçük terimini bulalım.

Çözüm

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x - 5$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$
$$= x^2 - 4x + 4 - 9$$
$$= (x-2)^2 - 9$$

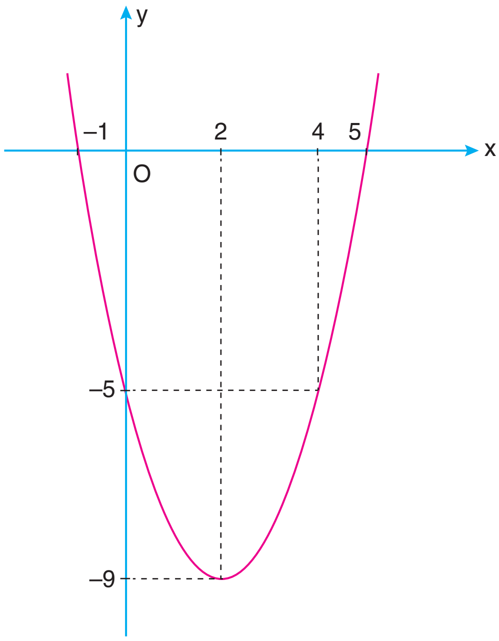
Tepe noktası, $T(2, -9)$ olur.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x+1)\cdot(x-5) = 0$$
$$x = -1 \quad \vee \quad x = 5$$

olup grafik x eksenini, $(-1, 0)$ ve $(5, 0)$ noktalarında keser.

(a_n) dizisinin tanım kümesi $\mathbb{Z}^+$ olduğundan grafik üzerinde apsisi sayma sayısı olan noktalar bu dizinin analitik düzlemdeki görüntüleridir.

Grafiğe göre (a_n) dizisinin en küçük terimi $a_2 = -9$ olur.



Örnek

$\left(\dfrac{n+49}{n+1}\right)$ dizisinin kaç teriminin 5 ten büyük olduğunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{n+49}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{48}{n+1} = 1 + \frac{48}{n+1} \text{ dir.}$$

$$1 + \frac{48}{n+1} > 5 \Rightarrow \frac{48}{n+1} > 4$$
$$\Rightarrow \frac{n+1}{48} < \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow n+1 < \frac{48}{4} \Rightarrow n+1 < 12 \Rightarrow n < 11 \text{ olur.}$$

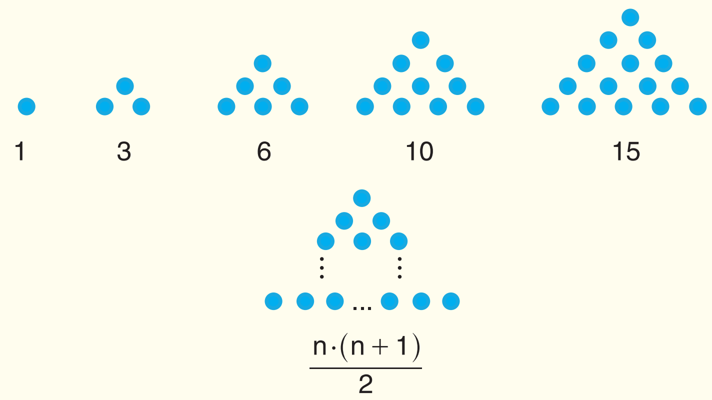
Buna göre dizinin ilk 10 terimi 5 ten büyüktür.

Örnek

$(a_n) = \left(\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}\right)$ dizisinin ilk 5 terimini bulalım.

Çözüm

$a_1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1,\ a_2 = \dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3,\ a_3 = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6,\ a_4 = \dfrac{4 \cdot 5}{2} = 10,\ a_5 = \dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$



1 den n ye kadar ardışık doğal sayıların toplamını veren sayılara **üçgen sayılar** denir.

Örneğin;

$0 + 1 = 1$

$1 + 2 = 3$

$1 + 2 + 3 = 6$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

olduğundan 1, 3, 6, 10, 15 sayıları **üçgen sayılar**dır. n sayma sayısı olmak üzere üçgen sayılar, $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.

Örnek

$(a_n) = (n^2)$ dizisinin ilk 5 terimini bulalım.

Çözüm

$a_1 = 1^2 = 1,\ a_2 = 2^2 = 4,\ a_3 = 3^2 = 9,\ a_4 = 4^2 = 16,\ a_5 = 5^2 = 25$

Ardışık iki üçgen sayısının toplamı bir **kare sayı**dır.

Örneğin;

$1+3=4=2^2$

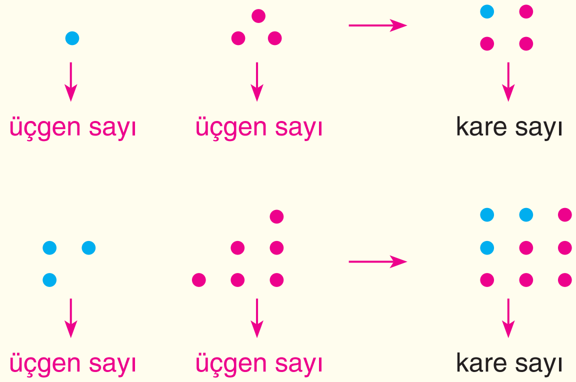
$3+6=9=3^2$

$6+10=16=4^2$ olduğundan 4, 9, 16 sayıları birer kare sayıdır.

n, 1 den büyük sayma sayısı ve ardışık iki üçgen sayı,

$\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$ ve $\dfrac{n(n+1)}{2}$ olduğundan

kare sayı, $\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}+\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}=n^2$ dir.





Örnek

Genel terimi $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ olan (a_n) dizisinin ilk 5 terimini bulalım.

Çözüm

$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{2}=1$

$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right]$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{4}=1$

$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]=2$

$a_4=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right]=3$

$a_5=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right]=5$

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki ifadelerden bir dizinin genel terimi olabileceklerin başına "✓" sembolü, olmayanların başına "x" sembolü koyunuz.

a) ☐ $\frac{n+1}{n+2}$ **b)** ☐ $\frac{n+1}{n-2}$ **c)** ☐ $\log(n-\sqrt{2})$

ç) ☐ $\cot\frac{2\pi}{2}$ **d)** ☐ $\sqrt{1-n^2}$ **e)** ☐ $-\frac{1}{n+1}$

2. Bir (a_n) dizisinde, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n+1} = a_n + 2$ ve $a_5 = 9$ olduğuna göre a_{20} kaçtır?

3. Bir (a_n) dizisinde, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = a_{n-1} + 2n$ ve $a_3 = 6$ ise a_{20} kaçtır?

4. Genel terimi $a_n = \frac{4n-1}{bn+5}$ olan dizi, b nin hangi değeri için sabit dizidir?

5. $(a_n) = (1+(-1)^n)$ ve $(b_n) = (1-\cos(n-1)\pi)$ dizilerinin eşit olduğunu gösteriniz.

6. $\left(\frac{n^2-2n-17}{n+1}\right)$ dizisinin terimlerinden kaç tanesi tam sayıdır?

7. $\left(\frac{6n-9}{n+2}\right)$ dizisinin kaç terimi negatif sayıdır?

8. $\left(\frac{n+57}{n+1}\right)$ dizisinin kaç terimi 4 ten büyüktür?

9. $(a_n) = \left(2^{n+1}\cdot(n+1)!\right)$ dizisi veriliyor. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 20$ olduğuna göre n kaçtır?

10. $(a_n) = \left(\frac{n-8}{4-2n}\right)$ dizisinin kaç terimi pozitiftir?

11. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = 2a_n - 1$ olduğuna göre (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

12. $(a_n) = (n^2 - 2n + 5)$ dizisinin en küçük terimini bulunuz.

13. $(a_n) = (-n^2 + 9n - 16)$ dizisinin en büyük terimini bulunuz.

2.1.3. Aritmetik ve Geometrik Dizilerin Özellikleri

Aritmetik Dizi ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki fark aynı sabit sayıya eşit olan dizilere **aritmetik dizi** denir.

Buna göre $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a_{n+1} - a_n = d$ eşitliğini sağlayan (a_n) dizisi bir aritmetik dizidir. d sayısına **aritmetik dizinin ortak farkı** denir.

$$a_{n+1} - a_n = d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_4 = a_3 + d$$

$$\vdots$$

$$+ \quad a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ dir.}$$

Buna göre aritmetik dizinin genel terimi; $a_n = a_1 + (n-1)d$ olur.

Örnek

İlk terimi 4 ve ortak farkı 2 olan aritmetik dizinin 20. terimini bulalım.

Çözüm

$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_1 = 4$ ve $d = 2$ olduğundan

$a_{20} = 4 + (20-1) \cdot 2 = 4 + 19 \cdot 2 = 4 + 38 = 42$ olur.

Örnek

Birinci terimi 2, ortak farkı 4 olan aritmetik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm

$a_1 = 2$ ve $d = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)4 \Rightarrow a_n = 2 + 4n - 4 \Rightarrow a_n = 4n - 2$

Örnek

(a_n) aritmetik dizi olmak üzere $a_5 = 12,\ a_{13} = 24$ olduğuna göre a_{29} değerini bulalım.

Çözüm

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4 \cdot d = 12$

$a_{13} = a_1 + 12 \cdot d = 24$ tür.

$$\begin{array}{rl} & a_1 + 4d = 12 \\ + & -1/\ a_1 + 12d = 24 \\ \hline & -8d = -12 \end{array}$$

$d = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ olur. $a_5 = a_1 + 4d = 12 \Rightarrow a_1 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12$

$a_1 + 6 = 12$

$a_1 = 6$ dır.

Buna göre dizinin genel terimi $a_n = 6 + (n-1) \cdot \frac{3}{2}$ dir.

$a_{29} = a_1 + 28d \Rightarrow a_{29} = 6 + 28 \cdot \frac{3}{2} = 6 + 14 \cdot 3 = 6 + 42 = 48$ olur.

Örnek

5 ile 38 sayılarının arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 10 terim daha yerleştiriliyor. Oluşan aritmetik dizinin 8. terimini bulalım.

Çözüm

$$\underset{a_1}{\overset{5}{\downarrow}}\ \underbrace{.,.,.,.,.,.,.,.,.,.,}_{10\ \text{terim}}\ \underset{a_{12}}{\overset{38}{\downarrow}}$$

$a_1 = 5$ ve $a_{12} = 38$ olur. Buna göre

$a_{12} = a_1 + 11 \cdot d \Rightarrow 38 = 5 + 11d \Rightarrow 33 = 11d \Rightarrow d = 3$ tür.

$a_8 = a_1 + 7 \cdot d \Rightarrow a_8 = 5 + 7 \cdot 3 \Rightarrow a_8 = 5 + 21 \Rightarrow a_8 = 26$ olur.

$p < n$ olmak üzere bir aritmetik dizinin genel terimi $a_n = a_p + (n-p)\cdot d$; ortak farkı, $d = \dfrac{a_n - a_p}{n-p}$ dir.

$p < n$ olmak üzere

$$\begin{array}{rl} & a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \\ - & a_p = a_1 + (p-1)\cdot d \\ \hline & a_n - a_p = (n-1-p+1)\cdot d \\ & a_n - a_p = (n-p)\cdot d \text{ dir.} \end{array}$$

Buradan, d yalnız bırakılırsa $d = \dfrac{a_n - a_p}{n-p}$ olur.

Örnek

Bir aritmetik dizinin 8. terimi 12 ve 20. terimi -12 olduğuna göre 12. terimini bulalım.

Çözüm

$p = 8$ ve $n = 20$ olmak üzere

$$d = \frac{a_n - a_p}{n-p} \Rightarrow d = \frac{-12-12}{20-8}$$

$$d = \frac{-24}{12} \Rightarrow d = -2 \text{ olur.}$$

$$a_{12} = a_8 + (12-8)\cdot d \Rightarrow a_{12} = 12 + 4\cdot(-2) \Rightarrow a_{12} = 12 - 8 \Rightarrow a_{12} = 4 \text{ olur.}$$

Bir aritmetik dizide her terim kendinden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin aritmetik ortasıdır.

(a_n) bir aritmetik dizi ve d ortak fark olsun.

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)\cdot d \text{ ve } a_{n+1} = a_1 + n\cdot d \text{ dir.}$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2)\cdot d + a_1 + n\cdot d}{2}$$

$$= \frac{2a_1 + (2n-2)d}{2} = \frac{2\cdot[a_1 + (2n-1)d]}{2} = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$= a_n$ olup a_n, a_{n-1} ile a_{n+1} in aritmetik ortalamasıdır.

Örneğin; $a_5 = \dfrac{a_1 + a_9}{2} = \dfrac{a_2 + a_8}{2} = \dfrac{a_3 + a_7}{2} = \dfrac{a_4 + a_6}{2}$ dir.

Örnek

Bir aritmetik dizinin 4. terimi 18, 20. terimi -6 olduğuna göre 12. terimini bulalım.

Çözüm

$a_4 = 18$ ve $a_{20} = -6$ olmak üzere

$12 - 4 = 20 - 12 = 8$ olduğundan 4 ve 20. terimler 12. terime eşit uzaklıktadır. Buna göre

$$a_{12} = \frac{a_4 + a_{20}}{2} = \frac{18 + (-6)}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ olur.}$$

Örnek

2, a, b, c, 50 sonlu dizisi bir aritmetik dizi ise $a + b + c$ toplamını bulalım.

Çözüm

$$b = \frac{2 + 50}{2} \Rightarrow b = 26$$

$$a = \frac{2 + b}{2} \Rightarrow a = \frac{2 + 26}{2} = 14$$

$$c = \frac{b + 50}{2} \Rightarrow c = \frac{26 + 50}{2} = 38$$

$$a + b + c = 26 + 14 + 38 = 78$$

Örnek

Sonlu bir aritmetik dizide $a_{15} = 12$ ve $a_1 = -24$ ise $a_2 + a_{14}$ toplamını bulalım.

Çözüm

$$a_8 = \frac{a_{15} + a_1}{2} = \frac{a_2 + a_{14}}{2}$$

$$a_{15} + a_1 = a_2 + a_{14}$$

$$12 + (-24) = a_2 + a_{14}$$

$$a_2 + a_{14} = -12 \text{ olur.}$$

15 ile 1 ve 2 ile 14 sayısının 8 sayısına eşit uzaklıkta olduğuna dikkat ediniz.

SONUÇ

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı eşittir.

Ortak farkı d olan bir aritmetik dizide, ilk n terim toplamı S_n ile gösterilsin.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$= n \cdot a_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))d$$

$$= n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d$$

$$= \frac{2na_1 + (n-1)nd}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d)}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n})$$

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$ dir.

Örnek

Bir aritmetik dizide ilk terim 2 ve ortak fark $\frac{1}{4}$ olduğuna göre bu dizinin ilk 10 teriminin toplamını bulalım.

Çözüm

$$a_1 = 2, \ d = \frac{1}{4}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left(2 \cdot 2 + (10-1) \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$= 5 \cdot \left(4 + \frac{9}{4}\right)$$

$$= 5 \cdot \frac{25}{4}$$

$= \frac{125}{4}$ tür.

Örnek

10 ile 1000 arasında 9 ile bölünebilen tam sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

18, 27, 36, ... , 999 sayıları 9 ile tam bölünür. Bu sayılar ilk terimi 18 ve ortak farkı 9 alan bir aritmetik dizi oluşturur.

Buna göre

Terim sayısı $= n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1$

$= \dfrac{999 - 18}{9} + 1$

$= \dfrac{981}{9} + 1$

$= 109 + 1$

$= 110$ bulunur.

$S_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{110} = \dfrac{110}{2} \cdot (18 + 999)$

$= 55 \cdot 1017$

$= 55935$ olur.

Örnek

İlk n teriminin toplamı, $S_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$ olan bir (a_n) aritmetik dizisi için $a_4 + a_5 + a_6$ toplamını bulalım.

Çözüm

$a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - (a_1 + a_2 + a_3)$

$= S_6 - S_3$

$= \left(\dfrac{6^2 + 6}{2}\right) - \left(\dfrac{3^2 + 3}{2}\right)$

$= \dfrac{42}{2} - \dfrac{12}{2}$

$= 21 - 6$

$= 15$

UYGULAYALIM

1. Aşağıda, ilk terimi ile ortak farkı verilen aritmetik dizilerin genel terimlerini bulunuz.

a) $a_1 = 5, \quad d = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = -6, \quad d = 2$

c) $a_1 = 1, \quad d = 5$

ç) $a_1 = 0, \quad d = -\frac{1}{2}$

2. Aşağıda, iki terimi verilen aritmetik dizilerin 10. terimini bulunuz.

a) $a_3 = 4, \quad a_5 = 12$

b) $a_1 = -6, \quad a_7 = 30$

c) $a_3 = -4, \quad a_4 = 6$

ç) $a_1 = 5, \quad a_{11} = 25$

3. İlk terimi -10 ve ortak farkı $\frac{1}{2}$ olan bir aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

4. İlk terimi 8 ve ortak farkı $-\frac{1}{4}$ olan bir aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

5. –10 ve 45 arasına 10 tane sayı yerleştirilerek bir aritmetik dizi elde ediliyor. Bu dizinin 8. terimini bulunuz.

6. 11 ve 38 sayıları arasına 8 tane sayı yerleştirilerek bir aritmetik dizi elde ediliyor. Bu dizinin 5. terimini bulunuz.

7. Bir (a_n) aritmetik dizisinde $a_1 = 6$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n+1} = a_{n+4}$ olduğuna göre dizinin ilk 12 teriminin toplamını bulunuz.

8. Bir (a_n) aritmetik dizisinde $a_3 = 3$ ve $a_{11} = 18$ olduğuna göre dizinin ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

9. İlk n teriminin toplamı, $S_n = 3n^2 + 4n$ olan bir aritmetik dizinin 2. terimini bulunuz.

Geometrik Dizi ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki oran sabit olan dizilere **geometrik dizi** denir. Sabit orana ise **ortak çarpan** denir. Buna göre

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (a_n \neq 0)$ ise $r \in \mathbb{R}$ sayısı bu dizinin ortak çarpanıdır.

(a_n) geometrik dizi ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ ise } a_{n+1} = a_n \cdot r$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\vdots$$

(a_n) geometrik dizisinde, a_1 e birinci terim, a_2 ye ikinci terim, ..., a_n ye **genel terim** denir.

Genel terim, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ dir.

Örnek

$(a_n) = (5 \cdot 2^n)$ dizisinin geometrik dizi olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) geometrik dizidir. Buna göre

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{5 \cdot 2^n} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{2^n} \cdot 2}{\cancel{5} \cdot \cancel{2^n}} = 2 \in \mathbb{R}$ olduğundan (a_n) geometrik dizidir.

Örnek

$(a_n) = \left(\frac{1}{4^n}\right)$ dizisinin geometrik dizi olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{4^n}{4^n \cdot 4} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$ olduğundan (a_n) geometrik dizidir.

Örnek

İlk terimi 4, ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 5. terimini bulalım.

Çözüm

$a_1 = 4$ ve $r = 2$ olmak üzere

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_5 = 4 \cdot 2^4 \Rightarrow a_5 = 64$ olur.

Örnek

Bir geometrik dizinin 3. terimi 16 ve 8. terimi $\frac{1}{2}$ olduğuna göre ortak çarpanını bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= a_1 \cdot r^2 \Rightarrow a_1 \cdot r^2 = 16 \\ a_8 &= a_1 \cdot r^7 \Rightarrow a_1 \cdot r^7 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{taraf tarafa bölünürse}$$

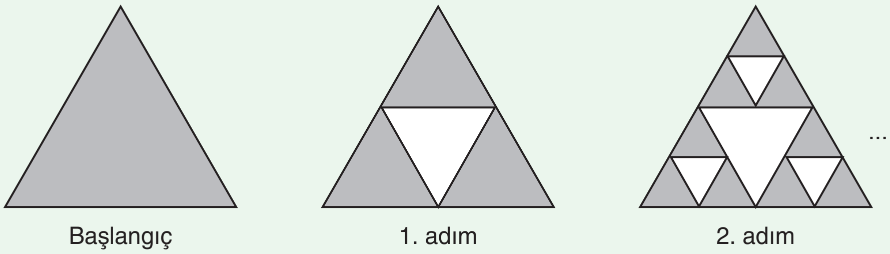
$$\frac{\cancel{a_1} \cdot r^2}{\cancel{a_1} \cdot r^7} = \frac{16}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{r^5} = 32 \Rightarrow r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow r^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Sierpinski kalburu bir fraktal örneği olarak 1915'te tasarlanmıştır. Sierpinski kalburu, eşkenar üçgen biçiminde bir siyah yüzey alınarak inşa edilir.

İlk adımda, bu üçgen dört eşkenar üçgene ayrılarak ortadaki üçgen kaldırılır.

İkinci adımda, kalan üç üçgenin her biri dört eşkenar üçgene ayrılarak bu üçgenlerin ortalarındaki üçgenler kaldırılır.

Üçüncü adımda 9 üçgen kaldırılır. Süreç sonsuza kadar devam ederse Sierpinski kalburu elde edilir.



Buna göre

- n. adımda kaldırılan üçgen sayısını verecek bir (a_n) geometrik dizisi bulunuz.
- 10. adımda kaldırılan üçgen sayısını bulunuz.
- Başlangıçtaki üçgenin alanını birimkare olarak kabul edip n. adımda kaldırılan alanı verecek bir (b_n) geometrik dizisi bulunuz.
- 8. adımda kaldırılan alanı bulunuz.

Bir geometrik dizide herhangi bir terimin karesi, kendinden eşit uzaklıktaki iki terimin çarpımına eşittir: $(a_n)^2 = a_{n-p} \cdot a_{n+p} \quad (n > p)$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ olduğundan $a_{n-p} = a_1 \cdot r^{n-p-1}$ ve $a_{n+p} = a_1 \cdot r^{n+p-1}$ olur.

Bu eşitlikleri taraf tarafa çarpalım.

$$a_{n-p} \cdot a_{n+p} = a_1 \cdot r^{n-p-1} \cdot a_1 \cdot r^{n+p-1}$$

$$a_{n-p} \cdot a_{n+p} = a_1^2 \cdot r^{2n-2}$$

$$a_{n-p} \cdot a_{n+p} = (a_1 \cdot r^{n-1})^2 \Rightarrow (a_n)^2 = a_{n-p} \cdot a_{n+p} \quad (a_n = a_1 \cdot r^{n-1})$$

Örnek

Pozitif terimli bir geometrik dizinin 3. terimi 4 ve 9. terimi 25 ise 6. terimini bulalım.

Çözüm

$a_3 = 4$ ve $a_9 = 25$ olduğunu biliyoruz.

a_6, a_3 ve a_9 a eşit uzaklıkta olduğuna göre

$$a_6^2 = a_3 \cdot a_9 \Rightarrow a_6^2 = 4 \cdot 25$$

$$a_6 = \sqrt{4 \cdot 25}$$

$$a_6 = 10 \text{ olur.}$$

Örnek

Pozitif terimli bir geometrik dizinin 2. terimi 25 ve 8. terimi 100 olduğuna göre 14. terimini bulalım.

Çözüm

$a_2 = 25$ ve $a_8 = 100$ olduğunu biliyoruz.

a_2 ve a_{14}, a_8 e eşit uzaklıkta olduğuna göre

$$a_8^2 = a_2 \cdot a_{14} \Rightarrow 100^2 = 25 \cdot a_{14}$$

$$\Rightarrow 10000 = 25 \cdot a_{14}$$

$$\Rightarrow a_{14} = 400 \text{ olur.}$$

(a_n) geometrik dizisinde $1 < k < n$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve ortak çarpan r olmak üzere

$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ dır.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ olduğunu biliyoruz.

$a_k = a_1 \cdot r^{k-1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{a_k}{r^{k-1}}$ ifadesini, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ eşitliğinde yerine yazalım.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{a_k}{r^{k-1}} \cdot r^{n-1}$$

$$a_n = a_k \cdot r^{n-1-k+1}$$

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \text{ olur.}$$

Örnek

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_7 = 10$ ve $a_9 = 90$ olduğuna göre a_{12} değerini bulalım.

Çözüm

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \Rightarrow a_9 = a_7 \cdot r^{9-7}$$

$$a_9 = a_7 \cdot r^2$$

$$90 = 10 \cdot r^2$$

$$9 = r^2 \Rightarrow r = 3 \text{ olur.}$$

$$a_{12} = a_9 \cdot r^3 \Rightarrow a_{12} = 90 \cdot 3^3$$

$$a_{12} = 90 \cdot 27$$

$$a_{12} = 2430 \text{ olur.}$$

Sonlu bir geometrik dizide, $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = ... = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = r$ (r ortak çarpan) olduğundan

$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ...$ yazılabilir.

Yani, sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan aynı uzaklıkta olan terimlerin çarpımları eşittir.

Örnek

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_3 = 8,\ a_{15} = \frac{1}{2}$ ve $a_{10} = \frac{1}{8}$ ise a_8 değerini bulalım.

Çözüm

$a_3 \cdot a_{15} = a_{10} \cdot a_8$ olduğundan $8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot a_8 \Rightarrow a_8 = 32$ olur.

Ortak çarpanı r olan bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n olmak üzere;

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1}$$ ve $r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n$ ise

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$r.S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n$$

$-$

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n$$

$$S_n \cdot (1 - r) = a_1 \cdot (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r} \quad (r \neq 1) \text{ dir.}$$

Örnek

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 3$ ve ortak çarpan $r = 2$ olduğuna göre

a) İlk 4 teriminin toplamını,

b) İlk 8 teriminin toplamını bulalım.

Çözüm

a) $S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_4 = 3 \cdot \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = -3 \cdot (1 - 16) = 45$

b) $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_8 = 3 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2}$

$$S_8 = -3 \cdot (1 - 256)$$

$$S_8 = -3 + 768$$

$$S_8 = 765 \text{ olur.}$$

2.1.4. Dizi Problemleri

Leonardo Fibonacci (Leonardo Fibonaki), Orta Çağ'ın en yetenekli matematikçilerinden biri olarak kabul edilmiş ve dizileri keşfetmiştir.

İtalyan matematikçi Fibonacci, yazdığı matematik kitaplarından birinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir problem sorar:

"Çiftlikteki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapmaz. Üçüncü aydan itibaren her çift, her ay bir çift yavru yapar. Buna göre Fibonacci'nin arkadaşı bir tavşanla başlarsa kaç ay sonra kaç çift tavşanı olur?" Bu problemin çözümü sonucunda Fibonacci sayı dizisi olarak bilinen dizinin terimleri ortaya çıkar:



Leonardo Fibonacci
(1170-1250)

1. ay	2. ay	3. ay	4. ay	5. ay	...	...					
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...

Bu diziye dikkatli bakıldığında ilk iki sayı hariç her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. Ayrıca bir sonraki verilen terimin bir öncekine oranı "Altın Oran" adı verilen ve yaklaşık değeri 1,618 olan sayıyı verir. Bu ölçülerdeki nesnelerin ve canlıların daha estetik olduğu savunulur. Mimar Sinan'ın bir çok eserinde de altın oran görülmektedir. Süleymaniye, Selimiye Camileri'nin minarelerinde altın oran vardır.



Ayçiçeğinin merkezinden dışarı doğru sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar Fibonacci dizisinin terimleridir.

İnsan yüzü, çam kozalağı, Pascal üçgeni vb. birçok canlı ve nesnelerde de Fibonacci dizisinin ardışık terimleri mevcuttur.

Tütün yapraklarının dizilişinde Fibonacci dizisi mevcuttur. Bu şekilde tütün bitkisi Güneş'ten gelen ışığı en iyi şekilde alarak fotosentezi mükemmel bir şekilde gerçekleştirir.



Kaynak: Sertöz, S., Matematiğin Aydınlık Dünyası, Tübitak, Ankara, 2011.

Örnek

10 yıl önce yıllık 16 000 TL ile işe başlayan bir kişinin ücreti performansındaki verimlilik göz önünde bulundurularak her yıl %4 artmıştır. Bu kişinin 10 yıl boyunca toplam kaç TL ücret aldığını bulalım.

Çözüm

Toplam

1. yıl: 16 000 TL

2. yıl: $16\,000 + 16\,000 \cdot \frac{4}{100} = 16\,000\left(1 + \frac{4}{100}\right)$

$= 16\,000 \cdot (1{,}04)\text{TL}$

3. yıl: $16\,000 \cdot (1{,}04) + 16\,000 \cdot (1{,}04) \cdot \frac{4}{100}$

$= 16\,000 \cdot (1{,}04)^2$

4. yıl: $16\,000 \cdot (1{,}04)^3$

$\vdots$

n. yıl: $16\,000.(1{,}04)^{n-1}$ şeklinde modellenebilir. Buna göre

10 yılda toplam: $16\,000 + 16\,000(1{,}04) + 16\,000(1{,}04)^2 + ... + 16000.(1{,}04)^{10-1}$

$$= 16000 \cdot \left[\frac{1-(1{,}04)^9}{1-1{,}04}\right]$$

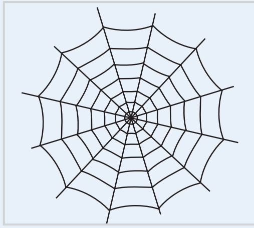
$\approx$ 192 000 TL ücret almıştır.

SONUÇ

$S_N = 1 + r + r^2 + ... + r^N = \sum_{k=0}^{N} r^k$ toplamı, N büyürken, $r \geq 1$ ise sınırsız olarak büyür. $0 \leq r < 1$ ise bir gerçek sayıya yaklaşır.

$\sum$ sembolüne, **toplam sembolü** denir. $\sum_{k=0}^{10} 2^k$ ifadesi, $0 \leq k \leq 10$, $k \in \mathbb{N}$ için 2^k değerlerinin toplamı demektir.

Örümcekler bilindiği gibi avlanmak, yumurtalarını bırakmak, dış tehlikelere karşı korunmak için ağ üretirler.



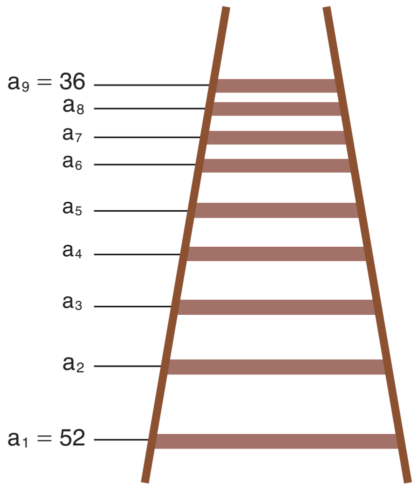
Örümcekler ilk önce arka kısımlarından bir ipek lif salarak bunun hava akımıyla birlikte uçuşup bir yere takılmasını bekler. Bu ipek lif köprü görevini gören bir hat oluşturur. Bu hat ağın iskeletini oluşturur. Temel iskeleti kurduktan sonra her biri merkezde sabitlenmiş, merkezden dışa doğru teller oluşturmaya başlar.

Sarmal eğrilerden oluşan bu ağı sürekli olarak sabit bir oranda genişlettiğinden ortaya çıkan şekil, uçan bir böceğin yakalanması için kullanılabilecek en mükemmel yapıdır. Her bir kademesindeki ağ uzunluklarının farkı birbirine eşit olup bu uzunluklar aritmetik dizi oluşturmaktadır.

Örnek

Ahmet Usta, komşusundan emanet olarak aldığı merdiveni kaza sonucu kırıyor ve bu hatasını telafi etmek istiyor. Bunun için, çok sevdiği komşusunun ahşap merdiveninin yerine daha sağlam bir merdiven yaparak hediye etmek istiyor.

Ahmet Usta, 9 basamaktan oluşan bir merdivenin ilk basamağının uzunluğu 52 cm ve en üstteki basamağın uzunluğu 36 cm olacak biçimde basamak uzunluklarının kademe kademe azalmasını planlıyor. Merdiven uzunlukları arasındaki fark eşit olduğuna göre aradaki 7 basamağın uzunluğunu bulalım.



Çözüm

Merdiven uzunlukları arasındaki fark sabit olacağından bir aritmetik dizi oluşur. Buna göre

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_9 = a_1 + (9-1)\cdot d$$

$$36 = 52 + 8\cdot d$$

$$-16 = 8d$$

$$d = -\frac{16}{8} = -2 \text{ olur.}$$

Bu durumda her basamak bir öncekinden 2 cm daha kısa olacaktır. Buna göre

$a_2 = 50$ cm, $a_3 = 48$ cm, $a_4 = 46$ cm, $a_5 = 44$ cm, $a_6 = 42$ cm, $a_7 = 40$ cm, $a_8 = 38$ cm uzunluğunda olacaktır.

Örnek

Ayşin, çocuklarına vatan sevgisini aşılamak için Çanakkale Zaferi konulu bir tiyatroya gidiyor. Ayşin'in meraklı olan küçük oğlu tiyatro salonundaki koltukları sıkılmadan sayıyor.

Bu tiyatroda ilk sırada 16 oturma yeri ve en son sırada 52 oturma yeri vardır. Her sıradaki oturma yeri bir öncekinden 2 fazla olduğuna göre bu tiyatroda kaç sıra olduğunu bulalım.

Çözüm

Her sırada bir öncekinden 2 oturma yeri fazla olduğuna göre ortak fark $d = 2$ dir.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow 52 = 16 + (n-1) \cdot 2$$

$$36 = 2n - 2 \Rightarrow 38 = 2n \Rightarrow n = 19 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla tiyatroda 19 sıra bulunmaktadır.

Örnek

Bir bilim insanı, yayılmakta olan bir hastalığı önlemek amacıyla bir aşı üzerinde çalışıyor. Aşıda kullandığı bakteri çeşidinin sayısı uygun bir ortamda her 30 dakikada bir ikiye katlanmaktadır. Başlangıçta ortamda 100 tane bakteri olduğuna göre 4 saat sonra ortamda kaç tane bakteri olacağını bulalım.

Çözüm

Her 30 dakikada bir ikiye katlandığına göre bu artışı ortak çarpanı 2 olan geometrik dizi gibi düşünelim.

4 saat içerisinde, 8 yarım saat olduğuna göre başlangıçtaki bakteri sayısını a_1 olarak alırsak 4 saat sonraki bakteri sayısı a_9 olacaktır.

Buna göre $a_9 = a_1 \cdot r^8 \Rightarrow a_9 = 100 \cdot 2^8 = 100 \cdot 256 = 25\,600$ olur.

Örnek

4 000 nüfuslu bir köyün nüfusu yılda ortalama %1 artmaktadır. Buna göre 10 yıl sonra köyün nüfusunun yaklaşık kaç olacağını bulalım.

Çözüm

1 yıl sonra nüfus %1 artacağından

$$4\,000 + 4\,000 \cdot \frac{1}{100} = 4000 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 4000 \cdot \frac{101}{100} = 4\,000 \cdot (1,01) \text{ olur.}$$

2 yıl sonra nüfus yine %1 artacağından

$$4\,000 \cdot (1,01) + 4\,000 \cdot (1,01) \cdot \frac{1}{100} = 4\,000 \cdot (1,01)^2 \text{ olur.}$$

Buna göre 10 yıl sonunda köyün toplam nüfusu, $4\,000 \cdot (1,01)^{10} \approx 4418$ olur.

Her bir kar tanesi altıgen yapıdadır. Bir kar tanesi bir toz tanesi etrafında oluşmaya başlar. Kar tanesinin altıgen olmasının nedeni suyun moleküler özelliğidir. Havanın soğumasına bağlı olarak kar kristalleri kollardan geometrik oranda uzamaya başlar.

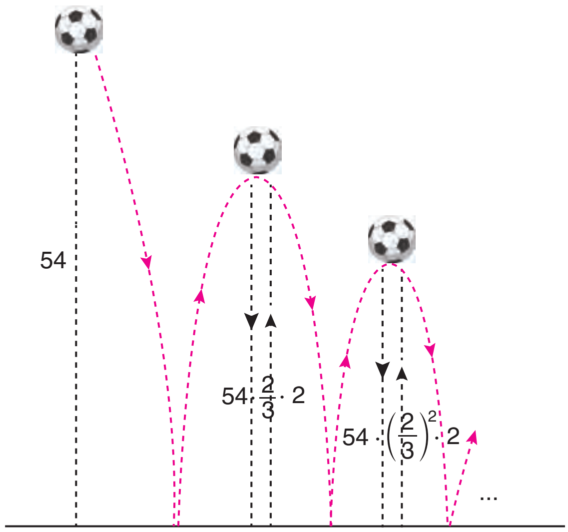


Örnek

Mehmet Bey, iki oğluna birer top hediye ediyor. Küçük oğlu oynarken evin balkonundan topu aşağı düşürüyor.

54 metre yükseklikten yere düşen top her yere çarptığında bir önceki yüksekliğinin $\frac{2}{3}$ ü kadar yükseliyor. Top 3 kere yere çarpıp yükseldiğinde dikey olarak kaç metre hareket etmiştir?

Çözüm



Topun aldığı toplam dikey yol,

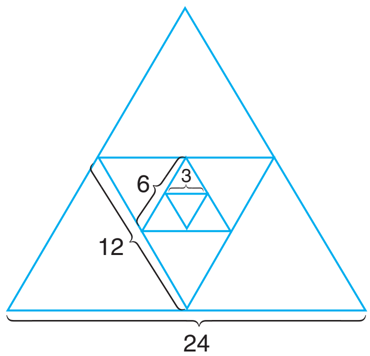
$$S_3 = 54 + 54 \cdot \frac{2}{3} .2 + 54.\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2$$

$$= 174 \text{ metre hareket etmiştir.}$$

Örnek

Bir kenarının uzunluğu 24 cm olan bir eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek eşkenar üçgenler elde ediliyor. Bu işlem 3 kere tekrarlanıyor. Bütün üçgenlerin alanlarının toplamını bulalım.

Çözüm



Bir kenarı a cm olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 dir.

1. üçgenin alanı $\frac{24^2\sqrt{3}}{4}$ (dıştaki üçgen)

2. üçgenin alanı $\frac{12^2\sqrt{3}}{4}$

3. üçgenin alanı $\frac{6^2\sqrt{3}}{4}$

4. üçgenin alanı $\frac{3^2\sqrt{3}}{4}$

$$S_4 = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} + \frac{12^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(576+144+36+9)\sqrt{3}}{4} = \frac{765\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz.

UYGULAYALIM

1. Aşağıda verilenlerden hangileri bir geometrik dizinin genel terimi olabilir?

a) $a_n = 4^n$ **b)** $b_n = 2^n - 1$ **c)** $c_n = 2 \cdot 3^n$

ç) $d_n = (-2)^n + 2$ **d)** $k_n = 2 \cdot 5^{n+1}$

2. Aşağıdaki tabloda ilk terimi ve ortak çarpanı verilen geometrik dizilerin genel terimlerini bularak uygun yerlere yazınız?

	Genel terim
$a_1 = 2, \quad r = 2$	$a_n =$
$a_1 = 3, \quad r = \frac{1}{2}$	
$a_1 = -2, \quad r = -\frac{1}{2}$	
$a_1 = 4, \quad r = -\frac{1}{2}$	

3. Aşağıda iki terimi verilen geometrik dizilerin 10. terimlerini bulunuz.

a) $a_2 = 2, \qquad a_4 = 8$

b) $a_3 = \frac{1}{2}, \qquad a_6 = \frac{1}{32}$

c) $a_1 = \frac{1}{4}, \qquad a_5 = 16$

4. Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_9 = 5$ ve $a_{11} = 45$ olduğuna göre a_{20} kaçtır?

5. Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_5 = \frac{1}{2}$ ve $a_{12} = \frac{1}{32}$ ise ortak çarpanı bulunuz.

6. $\frac{1}{27}$, x, y, z, 27, t sayıları bir geometrik dizinin ardışık altı terimi ise $x \cdot y \cdot z \cdot t$ kaçtır?

7. Ortak çarpanı 2 ve beşinci terimi 32 olan bir geometrik dizinin ilk 10 teriminin toplamını bulunuz.

8. 10 yıl önce yılda 5000 TL ile işe giren bir kişinin ücreti her yıl %10 artmıştır. Bu kişinin 10 yıl boyunca aldığı toplam ücreti bulunuz.

9. 27 metre yükseklikten bırakılan bir top yere her değdiğinde bir önceki yüksekliğinin $\frac{1}{3}$ ü kadar yükseliyor. Top 5 kere yere çarpıp yükseldiğinde kaç metre yol almıştır?

10. Bir bakteri çeşidinin nüfusu uygun bir ortamda her 30 dakikada bir ikiye katlanmaktadır. Başlangıçta ortamda 400 bakteri olduğuna göre 4 saat sonra ortamda kaç bakteri olur?

11. Arkadaşından aldığı 3720 TL borcu birinci ay 200 TL, ikinci ay 220 TL, üçüncü ay 240 TL gibi artırarak ödemeyi planlayan bir kişinin borcunun bitmesi kaç ay sürer?

2. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdakilerden hangisi bir reel sayı dizisi değildir?

A) $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)$ B) $\left(\log\dfrac{(n+2)}{(n+1)}\right)$ C) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ D) $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ E) $\left(\dfrac{n-2}{n-5}\right)$

2. $(a_n)=\left(\dfrac{6a-n}{2n+5}\right)$ dizisinin sabit dizi olabilmesi için a kaç olmalıdır?

A) $-\dfrac{1}{5}$ B) $-\dfrac{3}{5}$ C) $-\dfrac{5}{12}$ D) $\dfrac{5}{12}$ E) 1

3. Bir dizinin genel terimi $a_n=\dfrac{6-n}{n}\cdot a_{n-1}$ dir. $a_1=2$ olduğuna göre a_5 kaçtır?

A) 1 B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{2}{5}$ E) $\dfrac{3}{5}$

4. $(a_n)=\left(\dfrac{2n+8}{n}\right)$ dizisinin kaç tane terimi tam sayıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

5. Bir (a_n) dizisinde, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ için $a_{n+1}=a_n+2$ ve $a_2=8$ olduğuna göre a_{10} kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 30

6. Bir aritmetik dizinin 8. terimi a olduğuna göre 1. ve 15. terimlerin toplamı nedir?

A) $\dfrac{a}{4}$ B) $\dfrac{a}{2}$ C) a D) 2a E) 4a

7. Genel terimi $a_n = \frac{2}{(n+1)\cdot(n+3)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olan dizinin ilk 7 teriminin toplamı kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{12}{25}$ E) $\frac{28}{45}$

8. Bir dizinin genel terimi $a_n = \frac{8-n}{n} \cdot a_{n-1}$ dir. $a_1 = 1$ olduğuna göre a_6 kaçtır?

A) 1 B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{5}{6!}$ D) $\frac{6}{5!}$ E) 5!

9. Bir (a_n) aritmetik dizisinde, $a_5 = 12$ ve $a_{15} = 32$ olduğuna göre a_4 kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

10. Bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı, $S_n = n^2 - 2n$ olduğuna göre dizinin 4. terimi kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

11. Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_2 = 2$ ve $a_6 = 32$ olduğuna göre a_4 kaçtır?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 18 E) 20

12. Bir geometrik dizinin 1. terimi $\frac{3}{2}$, 2. terimi 3 olduğuna göre 6. terimi kaçtır?

A) 24 B) 28 C) 32 D) 48 E) 52

13. Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla, $x-2$, $x+1$, $x+5$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

14. Yaşlarının toplamı 48 olan 4 kardeşin yaşları bir aritmetik dizi oluşturmaktadır. En küçük kardeş 6 yaşında olduğuna göre en büyük kardeş kaç yaşındadır?

A) 10 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

15. Genel terimi a_n olan dizide, $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = n^2 \cdot a_n$ olduğuna göre a_4 kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 24 D) 36 E) 48

16. $(a_n) = \left(\dfrac{2^n}{3^{n-1}}\right)$ dizisi veriliyor.

Buna göre $\dfrac{a_4}{a_3}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{3}{10}$ E) $\dfrac{2}{27}$

17. Genel terimi $a_n = \dfrac{4n + a}{5 + n}$ olan dizi sabit dizi olduğuna göre a kaçtır?

A) 20 B) 16 C) 12 D) 10 E) 8

18. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{9}, x_1, x_2, ..., x_6, \dfrac{89}{9}\right)$ sekiz terimden oluşan aritmetik dizide $x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ toplamı kaçtır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 30 E) 40

19. Genel terimi $a_n = \begin{cases} 5^n, & \text{n çift sayı ise} \\ 2^n, & \text{n tek sayı ise} \end{cases}$ olan dizi veriliyor.

$a_1 + a_2$ toplamı kaçtır?

A) 15 B) 24 C) 27 D) 30 E) 35

GEOMETRİ

TRİGONOMETRİ

3. ÜNİTE

3. TRİGONOMETRİ

3.1. TOPLAM - FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER



3.1. TOPLAM - FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

3.1.1. İki Açının Ölçüleri Toplamının ve Farkının Trigonometrik Değeri

α ve θ iki açı olmak üzere

I. $\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cdot\cos\theta+\sin\alpha\cdot\sin\theta$ **II.** $\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cdot\cos\theta-\sin\alpha\cdot\sin\theta$

III. $\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta-\cos\alpha\cdot\sin\theta$ **IV.** $\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta+\cos\alpha\cdot\sin\theta$ dır.

İspat I

Birim çemberde,

$m(\widehat{KOA})=\alpha$ ve $m(\widehat{LOA})=\theta$ olduğundan

$m(\widehat{KOL})=\alpha-\theta$ dir.

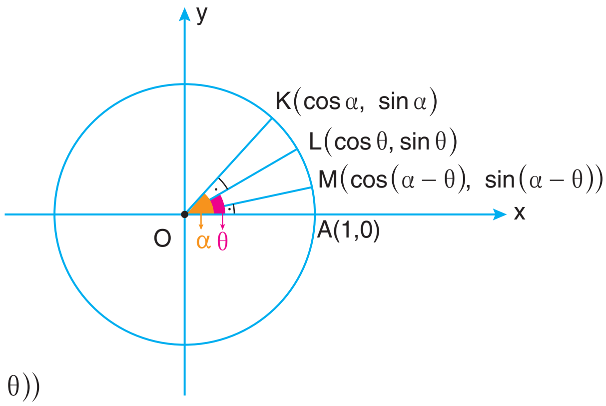
$\widehat{KOL}$ na eşit olan $\widehat{MOA}$ çizilirse

$m(\widehat{MOA})=\alpha-\theta$ olur.

$m(\widehat{KOA})=\alpha$ ise $K(\cos\alpha,\sin\alpha)$

$m(\widehat{LOA})=\theta$ ise $L(\cos\theta,\ \sin\theta)$

$m(\widehat{MOA})=\alpha-\theta$ ise $M(\cos(\alpha-\theta),\ \sin(\alpha-\theta))$



$m(\widehat{KOL})=m(\widehat{MOA})$ ise $|KL|=|MA|$ dır. İki nokta arasındaki uzaklık formülü kullanılırsa

$|KL|=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\theta)^2+(\sin\alpha-\sin\theta)^2}$

$|KL|^2=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\sin\theta+\sin^2\theta$

$=\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}-2\cos\alpha\cos\theta-2\sin\alpha\sin\theta$

$|KL|^2=2-2(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\cdot\sin\theta)\ldots(\mathbf{1})$

$|MA|=\sqrt{(\cos(\alpha-\theta)-1)^2+(\sin(\alpha-\theta)-0)^2}$

$|MA|^2=\cos^2(\alpha-\theta)-2\cos(\alpha-\theta)+1+\sin^2(\alpha-\theta)$

$|MA|^2=\underbrace{\cos^2(\alpha-\theta)+\sin^2(\alpha-\theta)}_{1}+1-2\cos(\alpha-\theta)$

$|MA|^2=2-2\cos(\alpha-\theta)\ldots(\mathbf{2})$

(**1**) ve (**2**) deki denklemler eşitlenirse

$2-2\cos(\alpha-\theta)=2-2(\cos\alpha\cdot\cos\theta+\sin\alpha\cdot\sin\theta)$ ise $\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha.\cos\theta+\sin\alpha.\sin\theta$ olur.

İspat II

$$\cos(\alpha+\theta)=\cos(\alpha-(-\theta))$$

$$=\cos\alpha\cdot\underbrace{\cos(-\theta)}_{\cos\theta}+\sin\alpha\cdot\underbrace{\sin(-\theta)}_{-\sin\theta}\quad \text{(I eşitliğinden)}$$

$$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cdot\cos\theta-\sin\alpha\cdot\sin\theta$$

İspat III

$$\sin(\alpha-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\theta)\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta\right)$$

$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\theta\right)$$

$$=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin\alpha}\cdot\cos\theta-\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos\alpha}\cdot\sin\theta\quad \text{(II eşitliğinden)}$$

$$\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta-\cos\alpha\cdot\sin\theta$$

İspat IV

$$\sin(\alpha+\theta)=\sin(\alpha-(-\theta))$$

$$=\sin\alpha\cdot\underbrace{\cos(-\theta)}_{\cos\theta}-\cos\alpha\cdot\underbrace{\sin(-\theta)}_{-\sin\theta}\quad \text{(III eşitliğinden)}$$

$$\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta+\cos\alpha\cdot\sin\theta$$

Örnek

$\cos 105°$'nin değerini bulalım.

Çözüm

$$\cos(105°)=\cos(60°+45°)$$

$$=\cos 60°\cdot\cos 45°-\sin 60°\cdot\sin 45°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Örnek

$\sin 25° \cdot \cos 35° + \sin 35° \cdot \cos 25°$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\sin 25° \cdot \cos 35° + \sin 35° \cdot \cos 25° = \sin(25° + 35°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Örnek

$\sin 15°$nin değerini bulalım.

Çözüm

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Örnek

$\dfrac{\sin 46° \cdot \cos 16° - \cos 46° \cdot \sin 16°}{\cos 32° \cdot \cos 13° - \sin 32° \cdot \sin 13°}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

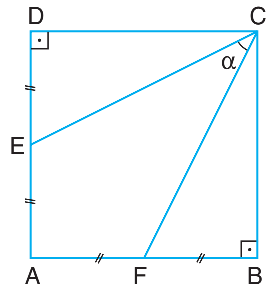
$$\frac{\sin 46° \cdot \cos 16° - \cos 46° \cdot \sin 16°}{\cos 32° \cdot \cos 13° - \sin 32° \cdot \sin 13°} = \frac{\sin(46° - 16°)}{\cos(32° + 13°)} = \frac{\sin 30°}{\cos 45°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tabloda verilen ifadelerin her birinin değerini örnekteki gibi bulunuz.

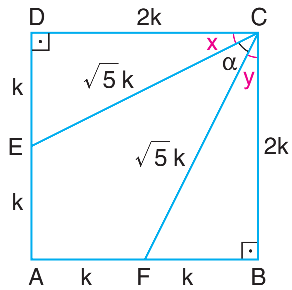
sin105°	
cos15°	
sin135°	
cos135°	
sin210°	
cos210°	
sin120°	$\sin(90° + 30°) = \sin 90° \cdot \cos 30° + \cos 90° \cdot \sin 30° = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
cos120°	

Örnek

Yandaki şekilde ABCD kare, $|DE| = |AE| = |AF| = |BF|$ olduğuna göre $\cos\alpha$ değerini bulalım?



Çözüm



$|DE| = |AE| = |AF| = |BF| = k,\ (k \in \mathbb{Z}^{+})$ alınırsa

$|CD| = |BC| = 2k$ ve $|EC| = |CF| = \sqrt{5}\,k$ olur.

$m(\widehat{DCE}) = x$ ve $m(\widehat{FCB}) = y$ olsun.

$x + \alpha + y = 90°$ ise $\alpha = 90° - (x + y)$ olur.

$$\cos\alpha = \cos(90° - (x+y))$$

$$= \sin(x+y)$$

$$= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \frac{k}{\sqrt{5}\,k} \cdot \frac{2k}{\sqrt{5}\,k} + \frac{2k}{\sqrt{5}\,k} \cdot \frac{k}{\sqrt{5}\,k} = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

Örnek

$\dfrac{\sqrt{3} \cdot \cos 20° - \sin 20°}{\sin 220°}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\sqrt{3} = \tan 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$ yazalım.

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \cos 20° - \sin 20°}{\sin 220°} = \frac{\frac{\sin 60°}{\cos 60°} \cdot \cos 20° - \sin 20°}{\sin 220°}$$

$$= \frac{\frac{\sin 60° \cdot \cos 20° - \sin 20° \cdot \cos 60°}{\cos 60°}}{\sin 220°}$$

$$= \frac{\sin(60° - 20°)}{\cos 60°(-\sin 40°)} \qquad (\sin 220° = -\sin 40°)$$

$$= -\frac{\sin 40°}{\frac{1}{2} \cdot \sin 40°} = -2 \text{ dir.}$$

$\alpha,\ \theta$ herhangi iki açı ve $\alpha \neq \frac{\pi}{2},\ \theta \neq \frac{\pi}{2}$ olsun.

I. $\tan(\alpha+\theta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\theta}$ **II.** $\tan(\alpha-\theta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\theta}$

III. $\cot(\alpha+\theta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\theta - 1}{\cot\alpha + \cot\theta}$ **IV.** $\cot(\alpha-\theta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\theta + 1}{\cot\theta - \cot\alpha}$

İspat I

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta}$$

İfadenin pay ve paydasını $\cos\alpha \cdot \cos\theta$ ya bölelim.

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta} + \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta} - \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\theta}$$ bulunur.

İspat II

$$\tan(\alpha-\theta) = \tan(\alpha+(-\theta)) = \frac{\tan\alpha + \overbrace{\tan(-\theta)}^{-\tan\theta}}{1 - \tan\alpha.\underbrace{(\tan(-\theta))}_{-\tan\theta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\theta}$$

İspat III

$$\cot(\alpha+\theta) = \frac{1}{\tan(\alpha+\theta)} = \frac{1}{\dfrac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\theta}} = \frac{1 - \tan\alpha.\tan\theta}{\tan\alpha + \tan\theta}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{1}{\cot\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cot\theta}}{\dfrac{1}{\cot\alpha} + \dfrac{1}{\cot\theta}} = \frac{\dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\theta - 1}{\cancel{\cot\alpha \cdot \cot\theta}}}{\dfrac{\cot\alpha + \cot\theta}{\cancel{\cot\alpha \cdot \cot\theta}}} = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\theta - 1}{\cot\alpha + \cot\theta}$$

İspat IV

$$\cot(\alpha-\theta) = \cot(\alpha+(-\theta)) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot(-\theta) - 1}{\cot\alpha + \cot(-\theta)} = \frac{-\cot\alpha \cdot \cot\theta - 1}{\cot\alpha - \cot\theta} = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\theta + 1}{\cot\theta - \cot\alpha}$$

Örnek

cot 15°nin değerini bulalım.

Çözüm

$$\cot 15° = \tan 75° = \tan(30° + 45°)$$

$$= \frac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \cdot \tan 45°}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

Örnek

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ olduğuna göre tanx değerini bulalım.

Çözüm

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 4$$

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$\frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \cdot \tan\frac{\pi}{4}} = 4$$

$$\frac{\tan x - 1}{1 + \tan x \cdot 1} = 4 \quad \text{ise} \quad 4 + 4\tan x = \tan x - 1$$

$$3\tan x = -5$$

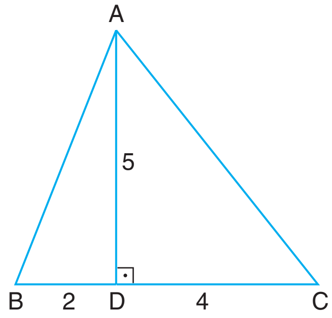
$$\tan x = -\frac{5}{3}$$

Örnek

Yandaki ABC üçgeninde, $[AD] \perp [BC]$,

$|AD| = 5$ br, $|BD| = 2$ br, $|CD| = 4$ br olduğuna göre

$\cot(\widehat{BAC})$ değerini bulalım.



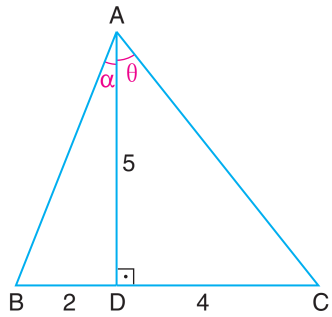
Çözüm

$$\cot(\widehat{BAC}) = \cot(\alpha + \theta)$$

$$= \frac{1}{\tan(\alpha+\theta)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\theta}} = \frac{1}{\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{17}{25}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{30}{17}} = \frac{17}{30}$$



Örnek

$\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\arctan 3 + \operatorname{arccot}\frac{1}{2}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\arctan 3 = x \Leftrightarrow \tan x = 3$

$\operatorname{arccot}\frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \cot y = \frac{1}{2}$ ise $\tan y = \frac{1}{\cot y} = 2$ olur.

$\arctan 3 + \operatorname{arccot}\frac{1}{2} = a$ olsun.

$\tan\left(\arctan 3 + \operatorname{arccot}\frac{1}{2}\right) = \tan a$

$$\tan a = \tan(x+y)$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{3+2}{1-3\cdot 2} = \frac{5}{-5} = -1$$

$\tan a = -1$ ise $a = \frac{3\pi}{4}$ olduğundan $\arctan 3 + \operatorname{arccot}\frac{1}{2} = \frac{3\pi}{4}$ olur.

İki Kat Açı Formülleri

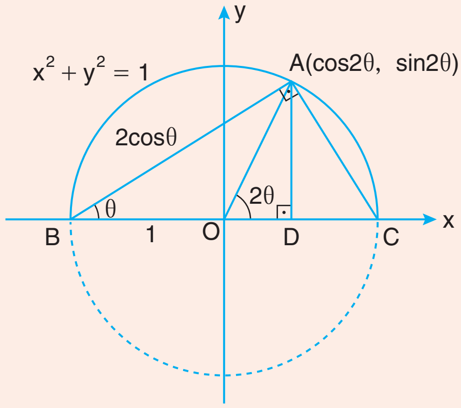
Yandaki birim çemberde

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DAC} = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|DA|}{|AC|} \Rightarrow \dfrac{2\cos\theta}{2} = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta}$

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DBA} = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|DB|}{|BA|} \Rightarrow \dfrac{2\cos\theta}{2} = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2\cos\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$



$= 2\cdot(1-\sin^2\theta) - 1$

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ ise } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta)$

$= 2 - 2\sin^2\theta - 1$

$\boxed{\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta}$

Örnek

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$ olduğunu iki açının ölçüleri toplamından yararlanarak bulalım.

Çözüm

$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$

$= \sin\theta\cdot\cos\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta = \sin\theta\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot\cos\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$

Örnek

$\dfrac{\sin 80°}{\sin 40°}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\dfrac{\sin 80°}{\sin 40°} = \dfrac{2\cdot\cancel{\sin 40°}\cdot\cos 40°}{\cancel{\sin 40°}}$

$= 2\cdot\cos 40°$

Örnek

$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{\sin 20°}{\sin 20°} \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20°}^{\sin 40°}}{\sin 20°} \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{\sin 20°}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{2 \cdot \sin 40° \cdot \cos 40°}^{\sin 80°} \cdot \cos 80°}{\sin 20°}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 80° \cdot \cos 80°}{\sin 20°}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{2 \cdot \sin 80° \cdot \cos 80°}^{\sin 160°}}{\sin 20°}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 160°}{\sin 20°} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 20°} = \frac{1}{8}$$

Örnek

$\cos x = \frac{1}{4}$ ise $\cos 2x$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{2}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$$

Örnek

$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\underset{(\cos x)}{\frac{\sin 3x}{\sin x}} - \underset{(\sin x)}{\frac{\cos 3x}{\cos x}} = \frac{\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x}$$

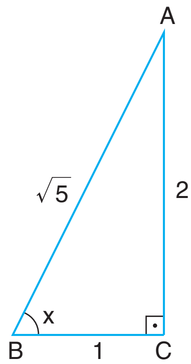
$$= \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = 2$$

Örnek

$\tan x = 2$ ise $\cos 2x$ değerini bulalım.

Çözüm

$\tan x = 2$ şartına uygun dik üçgen çizelim.



Dik üçgene göre

$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ olur.

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$= 1 - 2\cdot\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{4\cdot \cancel{5}^{1}}{\cancel{25}_{5}} = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$ tir.

Örnek

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\cos 2x = \cos(x + x)$

$= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

Örnek

$\cos^4 15° - \sin^4 15°$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\cos^4 15° - \sin^4 15° = (\cos^2 15° + \sin^2 15°)\cdot(\cos^2 15° - \sin^2 15°)$

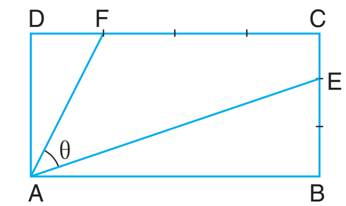
$= 1\cdot(\cos^2 15° - \sin^2 15°)$

$= \cos(2\cdot 15°)$ $\quad (\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

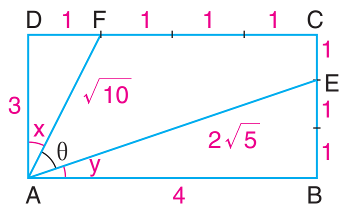
$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Örnek

Yandaki ABCD dikdörtgeninde [DC] kenarı 4 eş parçaya, [BC] kenarı 3 eş parçaya ayrılmıştır. $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{3}$ olduğuna göre $\cos 2\theta$ değerini bulalım.



Çözüm



$m(\widehat{DAF}) = x$

$m(\widehat{EAB}) = y$ olsun.

$x + y + \theta = 90°$

$\theta = 90° - (x + y)$

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin(90° - (x+y)) \\
&= \cos(x+y) \\
&= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\
&= \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{10}{2\sqrt{50}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2\theta \\
&= 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= 1 - 2 \cdot \frac{2}{4} = 1 - 1 = 0 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan 2\theta &= \tan(\theta + \theta) \\
&= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta \cdot \tan\theta} \\
&= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot 2\theta &= \cot(\theta + \theta) \\
&= \frac{\cot\theta \cdot \cot\theta - 1}{\cot\theta + \cot\theta} \\
&= \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}
\end{aligned}$$

olduğundan $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ ve $\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$ dır.

Örnek

$\tan x = \frac{1}{2}$ ise $\tan 2x$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

UYGULAYALIM

1. $\tan 75°$nin değerini bulunuz.

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

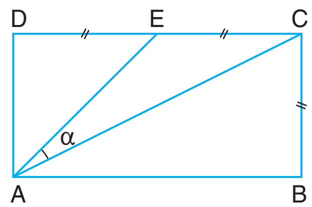
a) $\sin 29° \cdot \cos 61° + \cos 29° \cdot \sin 61$

b) $\cos 41° \cdot \cos 49° - \sin 41° \cdot \sin 49°$

c) $\dfrac{\tan 10° + \tan 35°}{1 - \tan 10° \cdot \tan 35°}$

ç) $\dfrac{\tan 33° + \tan 12°}{1 - \tan 33° \cdot \tan 12°}$

3. Şekildeki ABCD dik dörtgeninde $E \in [CD]$, $|DE| = |EC|$, $|DC| = 2|BC|$, $m(\widehat{CAE}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan\alpha$ nın değerini bulunuz.



4. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 1$ olduğuna göre $\cos^2 x$ kaçtır?

5. $\dfrac{\sin 48°}{\sin 16°} - \dfrac{\cos 48°}{\cos 16°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

6. $\sin 18° = t$ olduğuna göre $\cos 36°$nin t türünden yazılışını bulunuz.

7. $\dfrac{\cos 20° - \sqrt{3} . \sin 20°}{\cos 80°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

8. $\cos\left(2 \operatorname{arc}\cot \dfrac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. $\dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

3.2.1. Trigonometrik Denklemlerin Çözüm Kümeleri

sinx = a Denkleminin Çözüm Kümesi

Yandaki birim çemberde $a \in \mathbb{R}$ ve $-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere

$\sin\theta = a$ ise $\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = a$,

$\sin[(\pi - \theta) + k2\pi] = a \quad k \in \mathbb{Z}$ dir.

O hâlde, $0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere

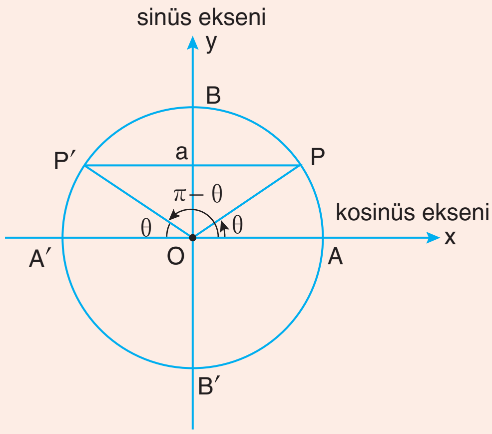
$\sin x = a$ ve $\sin\theta = a$ ise $\sin x = \sin\theta$,

$x = \theta + k \cdot 2\pi$ veya $x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi$ dir.

Buna göre; $\sin x = a$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{x: x = \theta + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

olur.



Örnek

$\sin x = \dfrac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Sinüsü $\dfrac{1}{2}$ ye eşit olan, $[0, 2\pi]$ aralığındaki reel sayılar $\dfrac{\pi}{6}$ ve $\pi - \dfrac{\pi}{6}$ dır.

Bu durumda, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ve $\pi - \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ sayılarının da sinüsü $\dfrac{1}{2}$ olacağından çözüm kümesi,

$Ç = \left\{x: \ x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

Örnek

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ve $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ olduğundan

$Ç = \left\{x: x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Örnek

$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$ denkleminin $0 \le x < 2\pi$ aralığındaki çözümünü bulalım.

Çözüm

$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \Rightarrow (\sin x - 2)\cdot(\sin x - 1) = 0$

$\sin x - 2 = 0 \vee \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \vee \sin x = 1$

$-1 \le \sin x \le 1$ olduğundan $\sin x = 2$ olamaz. Dolayısıyla $\sin x = 1$ dir.

$\sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ ise $x = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \pi - \frac{\pi}{2}$ olduğundan $Ç = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ olur.

cosx = a Denkleminin Çözüm Kümesi

Yandaki birim çemberde $a \in \mathbb{R}$ ve $-1 \le a \le 1$ olmak üzere

$\cos\theta = a$ ise $\cos(\theta + k\cdot 2\pi) = a$ ve

$\cos(-\theta + k\cdot 2\pi) = a$ dır.

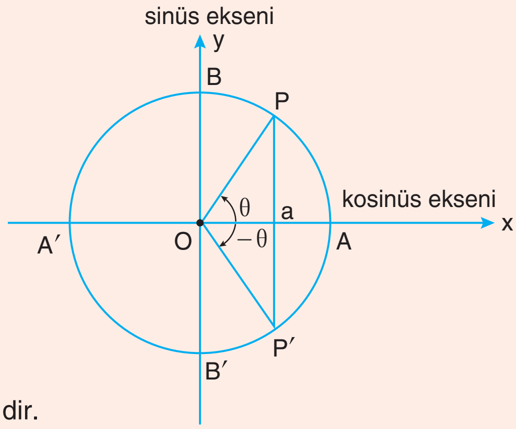
O hâlde, $0 \le \theta < 2\pi$ olmak üzere

$\cos x = a$ ve $\cos\theta = a$ ise $\cos x = \cos\theta$ dır.

$x = \theta + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k\cdot 2\pi$ olduğundan

$\cos x = a$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x = \theta + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k\cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$ dir.



Örnek

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Kosinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ye eşit olan değerler $\frac{\pi}{6}$ ve $-\frac{\pi}{6}$ dır.

Ayrıca, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ ve $-\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ sayılarının da kosinüsleri $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ye eşittir.

Dolayısıyla denklemin çözüm kümesi, $Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

Örnek

$\cos x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\cos x = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan ve $[0, 2\pi)$ aralığında bulunan değerlerden biri $\alpha = \frac{\pi}{3}$ olduğundan

$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanları doldurunuz.

Denklem	Çözüm kümesi	Denklem	Çözüm kümesi
$\sin x = 0$		$\cos x = 0$	
$\sin x = 1$		$\cos x = 1$	
$\sin x = \frac{1}{2}$		$\cos x = \frac{1}{2}$	
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\sin x = -\frac{1}{2}$		$\cos x = -\frac{1}{2}$	
$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\sin x = -1$		$\cos x = -1$	

Örnek

Bir iş yerinde kullanılan elektrik akımı ve bu akımla bağlantılı potansiyel fark sinüs fonksiyonu ile modellenmiştir. V: potansiyel fark ve t: zaman (sn.) olmak üzere kullanılan elektriğin potansiyel fark denklemi zamana bağlı olarak aşağıdaki gibidir.

$$V(t) = 120\sin(240\pi t)$$

Buna göre akım geçmeye başladıktan kaç saniye sonra potansiyel farkın 120V olacağını bulalım.

Çözüm

Denklemde V yerine 120 yazalım.

$$V(t) = 120\sin(240\pi t) \Rightarrow 120\sin(240\pi t) = 120$$

$$\sin(240\pi t) = 1$$

$$240\pi t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow t = \frac{1}{480} + k \cdot \frac{1}{120}$$

$k = 0$ için $t = \frac{1}{480}$ saniye sonra potansiyel fark 120V olur.

Örnek

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Birim çember üzerinde, kosinüsü $-\frac{1}{2}$ olan açılar $\frac{2\pi}{3}$ ve $-\frac{2\pi}{3}$ olduğundan

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$2x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee \ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \qquad x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \text{ olur.}$$

$k = 0$ için $x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 0 \cdot \pi = -\frac{\pi}{3}$

$k = 1$ için $x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \pi = \frac{4\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 1 \cdot \pi = \frac{2\pi}{3}$

$k = 2$ için $x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \pi = \frac{7\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \pi = \frac{5\pi}{3}$

Buna göre $[0, 2\pi)$ ndaki çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ olur.

Örnek

$2\cos^2 2x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini $[0, \pi)$ aralığında bulalım.

Çözüm

$2\cos^2 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0$ olur. Buradan,

$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \ \vee \ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$ olur.

$k = 0$ için $x = \frac{\pi}{8} \ \vee \ x = -\frac{\pi}{8}$

$k = 1$ için $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} \ \vee \ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$

$k = 2$ için $x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8} \vee \ x = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$ olur.

Denkleminin $[0, \pi)$ aralığındaki çözümü, $Ç = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$ olur.

tanx = a Denkleminin Çözüm Kümesi

Yanda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim.

P ve P′ noktalarına eşlenen sayıları $\theta + k\cdot\pi$ şeklinde ifade edebiliriz. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x = \theta + k\cdot\pi$ ise $\tan(\theta + k\cdot\pi) = a, \ k \in \mathbb{Z}$ dir.

$k = 0$ için, $\tan\theta = a$

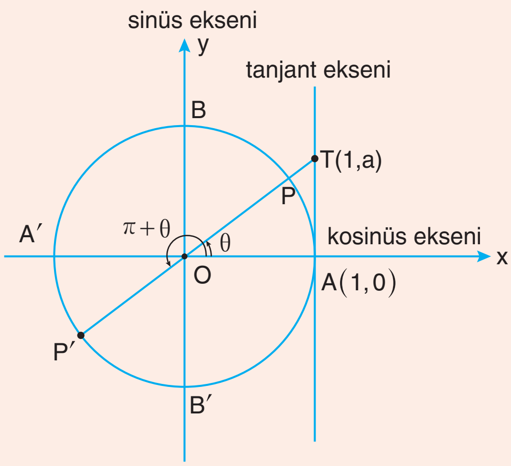
$k = 1$ için, $\tan(\theta + \pi) = a$

$k = 2$ için, $\tan(\theta + 2\pi) = a$

$k = 3$ için, $\tan(\theta + 3\pi) = a$

$\vdots \qquad \vdots$

$k = k$ için, $\tan(\theta + k\cdot\pi) = \alpha$ dır.



Buna göre $0 \le \theta < \pi$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\tan x = a$ ve $\tan\theta = a$ ise $\tan x = \tan\theta$ ve $x = \theta + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$ dir.

Sonuç olarak, $\tan x = a$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x = \theta + k\cdot\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

Örnek

$\tan x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

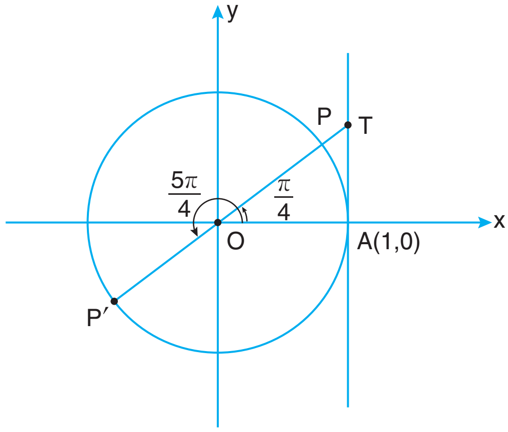
Önce tanjantı 1 olan $0 \leq \theta < \pi$ aralığında olup

$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olan açıların ölçülerini bulalım.

$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ tür.

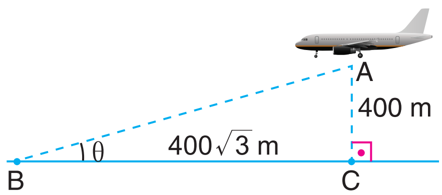
O hâlde $\tan x = 1$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi,

$Ç = \left\{x:\ x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.



Örnek

Bir yolcu uçağı kendi dik izdüşüm noktasından $400\sqrt{3}$ m uzaklıktaki bir noktayı hedefleyerek inişe geçiyor. Uçağın yerden yüksekliği $|AC| = 400$ m olduğuna göre hedeflenen noktaya inmesi için uçak zeminle kaç derecelik açı yapmalıdır?



Çözüm

$|AC| = 400$ m ve $|BC| = 400\sqrt{3}$ m olduğuna göre $\tan\theta = \frac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \tan\theta = \frac{400}{400\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi, $Ç = \left\{x: x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

$k = 0$ için $x = \frac{\pi}{6} + 0\cdot\pi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \theta = 30°$ olur.

cotx = a Denkleminin Çözüm Kümesi

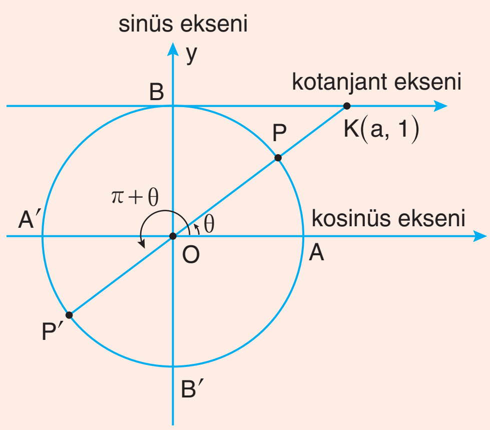
Yandaki birim çemberde $\theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq \theta < \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere P veya P′ noktalarına eşlenen sayılar, $\theta + k\cdot\pi$ şeklinde ifade edilebilir.

Buna göre $0 \leq \theta < \pi$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\cot x = a$ ve $\cot\theta = a$ ise

$\cot x = \cot\theta$ ve $x = \theta + k\cdot\pi$ dir.

$\cot x = a$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi, $Ç = \{x: x = \theta + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ dir.



Örnek

$\cot x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Önce kotanjantı sıfır olan, $0 \leq \theta < \pi \ (\theta \in \mathbb{R})$ aralığındaki açıların ölçülerini bulalım.

$\cot\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ olur. $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi, $Ç = \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

Örnek

$\cot x = \cot\frac{14\pi}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$ olduğundan $\cot\frac{14\pi}{3} = \cot\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cot\frac{2\pi}{3}$ olur. $\left(\frac{2\pi}{3}\text{, esas ölçü}\right)$

Buna göre $\cot x = \cot\frac{14\pi}{3} \Rightarrow \cot x = \cot\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$Ç = \left\{x: x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

$\sin f(x) = \sin g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot 2\pi \ \vee \ f(x) = \pi - g(x) + k\cdot 2\pi,$

$\cos f(x) = \cos g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot 2\pi \ \vee \ f(x) = -g(x) + k\cdot 2\pi,$

$\tan f(x) = \tan g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot\pi,$ $\cot f(x) = \cot g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot\pi$ olur. $(k \in \mathbb{Z})$

Örnek

$\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$3x = \frac{\pi}{6} - x + 2k\pi \ \vee \ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 2k\pi \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

Buna göre çözüm kümesi, $Ç = \left\{x: x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

Örnek

$\tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$3x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-x+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3x+x=-\underset{(2)}{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$$

$$4x=-\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$$

$$4x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$$

$$x=-\frac{\pi}{6\cdot4}+k\cdot\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{24}+k\cdot\frac{\pi}{4}\ \text{bulunur.}$$

Buna göre $Ç=\left\{x: x=-\frac{\pi}{24}+k\cdot\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ olur.

Örnek

$\cos x+\sin x=1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\cos x+\sin x=1\Rightarrow 1\cdot\cos x+\sin x=1$$

$$\tan\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\sin x=1\quad\left(\tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\cos x+\sin x=1$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x}{\cos\frac{\pi}{4}}+\underset{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sin x}{1}}=\underset{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{1}}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x}{\cos\frac{\pi}{4}}+\frac{\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\ \text{olur.}$$

Bu durumda

$$\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{4}+k\cdot2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+k\cdot2\pi\Rightarrow x=k\cdot2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4}+x=\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+k\cdot2\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{4}+k\cdot2\pi$$

$$x=-\frac{2\pi}{4}+\underset{(4)}{\frac{\pi}{1}}+k\cdot2\pi$$

$$x=-\frac{2\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}+k\cdot2\pi$$

$$x=\frac{2\pi}{4}+k\cdot2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\cdot2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{olur. Buna göre}$$

$$Ç=\left\{x: x=k\cdot2\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{2}+k\cdot2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\ \text{dir.}$$

Örnek

$\tan x \cdot \tan 3x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\tan x . \tan 3x = 1 \Rightarrow \tan x = \dfrac{1}{\tan 3x} \Rightarrow \tan x = \cot 3x$ olur.

$\cot 3x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$ olduğundan

$\tan x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - 3x + k\pi$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

$Ç = \left\{x:\ x = \dfrac{\pi}{8} + k \cdot \dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

$a,\ b,\ c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ şeklindeki denklemlerin çözüm kümesini bulmak için ifadenin iki tarafı $\sin x$ in katsayısı olan a reel sayısına bölünerek daha önceden çözüm kümesini bulmayı öğrendiğimiz denklem hâline getirilir.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \Rightarrow \frac{a \cdot \sin x}{a} + \frac{b \cdot \cos x}{a} = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \qquad \left(\frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$\sin x + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos x}{\cos\theta} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin x \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos\theta$$

$$\sin(x + \theta) = \frac{c}{a} \cdot \cos\theta$$

Bu işlemden sonra elde ettiğimiz denklemin çözüm kümesinden yararlanarak $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ denkleminin çözüm kümesi bulunur.

Örnek

$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Verilen denklemde $\sqrt{3}$ yerine $\tan 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$ yazarsak

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x - \frac{\sin 60°}{\cos 60°}\cos 2x = 1$$

$$\frac{\sin 2x \cdot \cos 60° - \sin 60° \cdot \cos 2x}{\cos 60°} = 1$$

$$\sin(2x - 60°) = \cos 60°$$

$\sin(2x - 60°) = \sin 30°$ olur. Bu durumda

$$2x - 60° = 30° + k \cdot 360° \ \vee \ 2x - 60° = 180° - 30° + k \cdot 360°$$

$$2x = 90° + k \cdot 360° \ \vee \ 2x = 210° + k \cdot 360°$$

$$x = 45° + k \cdot 180° \ \vee \ x = 105° + k \cdot 180°$$

olacağından denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x = 45° + k \cdot 180° \ \vee \ x = 105° + k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

Örnek

$\cos 2x + 3\sin x = -1$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki çözümünü bulalım.

Çözüm

$$\cos 2x + 3\sin x = -1 \quad (\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x)$$

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = -1$$

$$-2\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \quad (\sin x = t \text{ alalım})$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t + 1)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, \ t = 2$$

$t \neq 2$ ve $t = \sin x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow Ç = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$ olur.

Örnek

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ denleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$$
$$\tan x = \sqrt{3}$$

$\tan x = \sqrt{3}$ ise $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ olduğundan çözüm kümesi, $Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = 0 \Rightarrow a\cdot\sin x = -b\cdot\cos x$$
$$\frac{a\cdot\sin x}{a\cdot\cos x} = \frac{-b\cdot\cos x}{a\cdot\cos x}$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-b}{a}$$
$$\tan x = \frac{-b}{a} \text{ dır.}$$

Örnek

$\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos x = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ olur.}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi \text{ ise } Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ dir.}$$

Örnek

$2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ denkleminin her iki tarafını $\cos^2 x$ e bölelim. $(\cos x \neq 0)$

$$\frac{2 \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$2 - \tan x - \tan^2 x = 0$$

$$2 - \tan x - \tan^2 x = 0 \Rightarrow (1 - \tan x) \cdot (2 + \tan x) = 0$$

$$1 - \tan x = 0 \quad \vee \quad 2 + \tan x = 0$$

$$\tan x = 1 \qquad \tan x = -2$$

$$\tan x = \tan 45° \qquad \tan x = -\tan \theta = \tan(-\theta)$$

$$x = 45° \qquad x = -\theta \text{ dır.}$$

Yukarıda görüldüğü gibi elde ettiğimiz denklemler, $\tan x = \tan \theta$ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin çözüm kümesinin,

$Ç = \{x: x = \theta + 180° \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi,

$Ç = \{x: x = 45° + 180° \cdot k \ \vee \ x = -\theta + 180° \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

El Battani (828-929), Arap astronom ve matematikçidir. Battani, trigonometrik bağıntıları bugün kullanılan şekliyle formülleştirmiştir. Astronomi ve matematiğe büyük katkıları olan Battani, Orta Çağ Avrupa'sında saygıdeğer bir öğretmen ve bilgin olarak tanınmıştır. Battani, Batı'ya trigonometriyi öğreten kişi olarak da bilinmektedir. Battani, astronomi çalışmaları sırasında trigonometriden faydalanmıştır.

Kaynak: TDV İslam Ansiklopedisi

UYGULAYALIM

1. $\sin x = \sin \frac{4\pi}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $\tan 2x = -\sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

4. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $\cot 3x = -\tan x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8. $2\sin x + 3\cos x = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

9. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $x \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $\sin 3x + \sin x = \cos x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

11. $x \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

12. $\tan^2 x - 1 = 0$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

13. $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\sin 20° \cdot \cos 10° + \cos 20° \cdot \sin 10°$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

2. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\sin x = \frac{3}{5}$ olduğuna göre $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

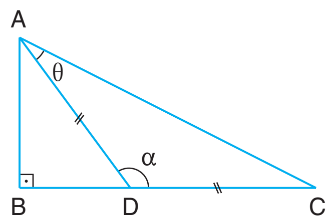
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{8}$

3. $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ olduğuna göre sin2x kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{5}{2}$

4. Yandaki ABC üçgeninde, $|AD| = |DC|$ ve

$\tan\theta = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $\sin\alpha$ kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{12}{25}$

D) $\frac{24}{25}$ E) $\frac{27}{25}$

5. $x \in (0, 180°]$ için $\cos(2x - 10°) = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{35°, 155°\}$ B) $\{30°, 45°\}$ C) $\{35°, 145°\}$ D) $\{35°, 150°\}$ E) $\{85°, 155°\}$

6. $3 - \sqrt{2}\sin x = 0$ denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{30°\}$ B) $\{45°\}$ C) $\{30°, 45°\}$ D) $\{45°, 60°\}$ E) $\varnothing$

7. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ denkleminin $(0, 2\pi]$ aralığındaki köklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{3}$ D) 2π E) $\frac{8\pi}{3}$

8. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$ denkleminin $[\pi, 2\pi]$ aralığındaki kökü kaçtır?

A) 210° B) 240° C) 300° D) 320° E) 330°

9. $\cos 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x: x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

B) $\{x: x = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

C) $\left\{x: x = k\pi \ \vee\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{x: x = k\pi \ \vee\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{x: x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \vee\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ iken $\sqrt{3}\sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) π

11. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\frac{\pi}{8}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ D) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

12. $\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 0$ denkleminin $[\pi, 2\pi)$ aralığındaki kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{2}$

13. $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$ olduğuna göre cotx değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

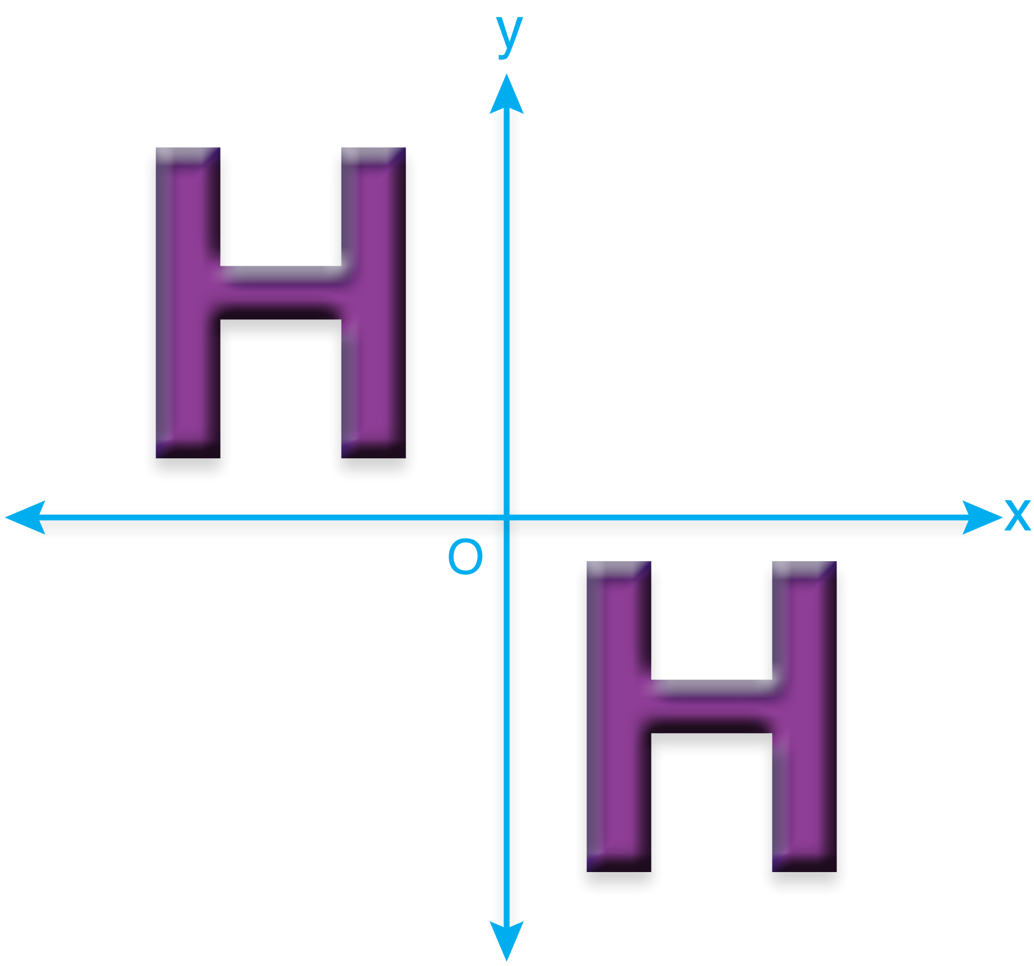
GEOMETRİ

DÖNÜŞÜMLER

4. ÜNİTE

4. DÖNÜŞÜMLER

4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER



4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER







Çevremizden dönüşümlere birçok örnek verebiliriz. Bir dağın görüntüsünün göl yüzeyine yansıması, bir kelebeğin kanatlarının birbirine göre durumu, insan yüzünün aynada yansıması vb. örnek olarak verilebilir.

4.1.1. Analitik Düzlemde Bir Noktanın Öteleme Dönüşümü Altındaki Görüntüsünün Koordinatları

Öteleme: Bir şeklin boyutları bozulmadan yerinin değiştirilmesine **öteleme dönüşüm hareketi** denir. Ötelemede biçim, boyut ve yön değişmez.

Öteleme dönüşüm hareketi yapılırken x ve y eksenleri boyunca belirtilen yönde, belirtilen birim kadar nokta ötelenir.

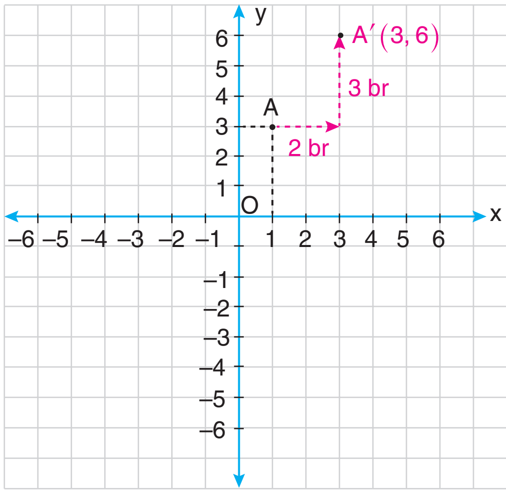
Sağa ve sola öteleme dönüşümü hareketi x eksenine paralel olarak, yukarı ve aşağı öteleme dönüşüm hareketi ise y eksenine paralel olarak yapılır.

Örnek

Analitik düzlemde, $A(1, 3)$ noktası 2 br sağa ve 3 br yukarı öteleniyor. A noktasının bu öteleme dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulalım.

Çözüm

A noktasının öteleme dönüşümü sonrasında görüntüsü A′ olsun. A noktasının 2 br sağa ve 3 br yukarı ötelenmesi ile A′(3, 6) noktası elde edilir.

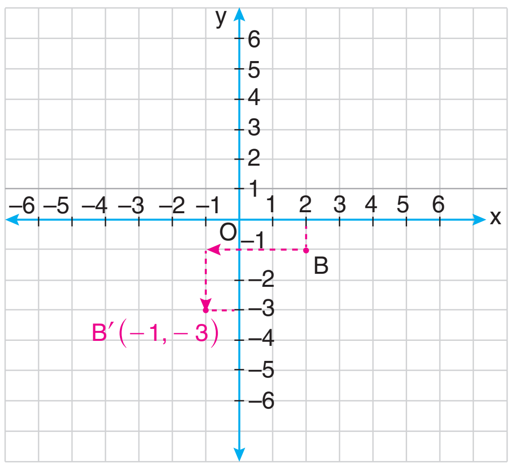


Örnek

B(2, − 1) noktası, analitik düzlemde, 3 br sola ve 2 br aşağı öteleniyor. B noktasının bu öteleme dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulalım.

Çözüm

B noktasının öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü B′ noktası olsun. B noktası 3 br sola ve 2 br aşağıya ötelendiğine göre B noktasının görüntüsü, B′(−1, − 3) noktasıdır.



SONUÇ

Bir nokta, x eksenine paralel sağa doğru ötelenirse apsis ile öteleme miktarı toplanır. Sola doğru ötelenirse apsisten öteleme miktarı çıkarılır.

Nokta, y eksenine paralel olarak yukarı doğru ötelenirse ordinat ile öteleme miktarı ile toplanır. Aşağı doğru ötelenirse ordinattan öteleme miktarı çıkarılır.

Örnek

$C(-5, 2)$ noktası analitik düzlemde, 4 br aşağı ve 2 br sağa doğru ötelenmektedir. C noktasının bu öteleme dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulalım.

Çözüm

C noktasının öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü C' noktası olsun. Apsise 2 ekleyip ordinattan 4 çıkaralım. $C(-5, 2)$ ise $C'(-5+2,\ 2-4) = C'(-3, -2)$ olur.

Analitik Düzlemde Bir Noktanın Simetri Dönüşümü Altındaki Görüntüsünün Koordinatları

Bir şeklin bir noktaya veya bir doğruya göre simetriğinin alınmasına **simetri (yansıma) dönüşümü** denir.

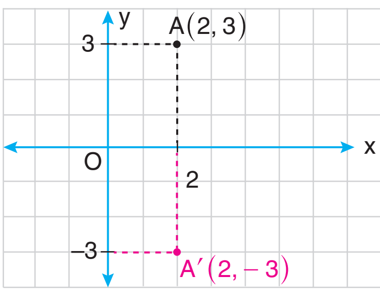
Analitik düzlemde bir noktanın x eksenine göre yansıması bu noktanın x eksenine göre simetriğidir. Benzer şekilde bir noktanın y eksenine göre yansıması bu noktanın y eksenine göre simetriğidir.

Örnek

$A(2, 3)$ noktasının x eksenine göre yansıma altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulalım.

Çözüm

$A(2, 3)$ noktasının x eksenine göre yansıması, bu noktanın x eksenine göre simetriğidir. Yandaki şekle göre $A(2, 3)$ noktasının x eksenine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(2, -3)$ noktasıdır.

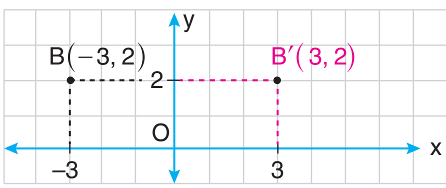


Örnek

Analitik düzlemde, $B(-3, 2)$ noktasının y eksenine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulalım.

Çözüm

$B(-3, 2)$ noktasının yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü B' noktası olsun. Yandaki şekle göre $B(-3, 2)$ ise $B'(3, 2)$ olur.



SONUÇ

Analitik düzlemde bir $A(x, y)$ noktasının x eksenine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(x, -y)$; y eksenine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(-x, y)$ olur.

Örnek

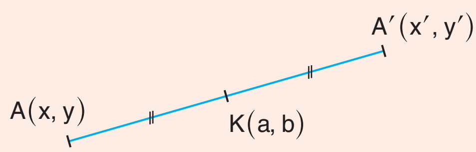
$A(3, -5), B(-2, 1), C(4, 2)$ noktalarının x ve y eksenlerine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntülerini bulalım.

Çözüm

A, B ve C noktalarının yansıma dönüşümü altındaki görüntüleri sırası ile A', B' ve C' olsun.

x eksenine göre	y eksenine göre
$A(3, -5)$ ise $A'(3, 5)$	$A(3, -5)$ ise $A'(-3, -5)$
$B(-2, 1)$ ise $B'(-2, -1)$	$B(-2, 1)$ ise $B'(2, 1)$
$C(4, 2)$ ise $C'(4, -2)$	$C(4, 2)$ ise $C'(-4, 2)$

A noktasının, K noktasına göre yansıması A' noktası olsun. Bu durumda, K noktası $[AA']$ nın orta noktası olur. Orta noktanın tanımından



$$a = \frac{x + x'}{2} \text{ ise } x' = 2a - x$$

$$b = \frac{y + y'}{2} \text{ ise } y' = 2b - y \text{ olur.}$$

$A(x, y)$ noktasının $K(a, b)$ noktasına göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü,

$A'(x', y') = A'(2a - x,\ 2b - y)$ olur.

Örnek

$A(-1,4)$ noktasının $B(-3,2)$ noktasına göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım.

Çözüm

$A(-1,4)$ noktasının $B(-3,2)$ noktasına göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(x',y')$ olsun. B noktası A ve A' noktalarının orta noktasıdır. Buna göre

$-3=\frac{-1+x'}{2}$ ise $x'=-6+1$

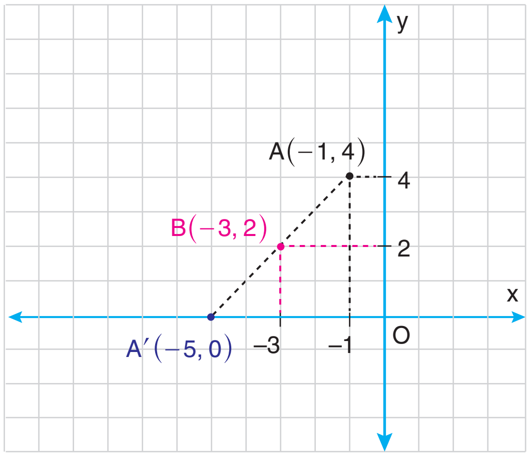
$x'=-5$

$2=\frac{4+y'}{2}$ ise $y'=4-4$

$y'=0$ olduğundan

$A'(x',y')=A'(-5,0)$ olur.

$A(-1,4)$ ve $B(-3,2)$ noktalarını analitik düzlemde işaretleyelim. Analitik düzlemde, $A(-1,4)$ noktasının $B(-3,2)$ noktasına göre yansıması alınırsa $A'(-5,0)$ noktası elde edilir.



Örnek

$A(-1,3)$ noktasının $B(5,6)$ noktasına göre yansıması olan noktanın koordinatlarını bulalım.

Çözüm

$A(-1,3)$ noktasının $B(5,6)$ noktasına göre yansıması olan nokta, $A'(x',y')$ olsun.

$x'=2a-x=2\cdot5-(-1)=10+1=11,$

$y'=2b-y=2\cdot6-3=12-3=9$ dir. $A'(11,9)$ bulunur.

Örnek

Analitik düzlemde, $A(x,y)$ noktasının $P(1,5)$ noktasına göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(5,-2)$ noktasıdır. Buna göre $x+y$ toplamını bulalım.

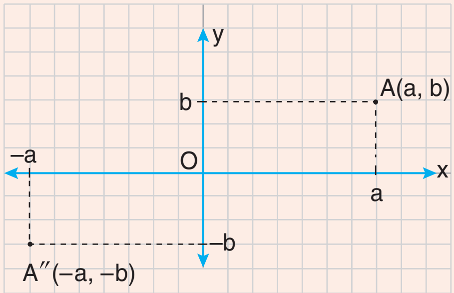
Çözüm

$P(1,5)$ orta nokta olduğundan

$1=\frac{x+5}{2}$ ise $x=2-5$ ise $x=-3$ ise $5=\frac{y+(-2)}{2}$ ise $y=10+2$ ise $y=12$ olur.

Buna göre $A(x,y)=A(-3,12)$ ise $x+y=-3+12=9$ olur.

Koordinat sisteminde $A(a,b)$ noktasının orjine göre simetriği, $A''(-a,-b)$ noktasıdır.



Örnek

Analitik düzlemde, $K(-3,6)$ noktasının orijine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulalım.

Çözüm

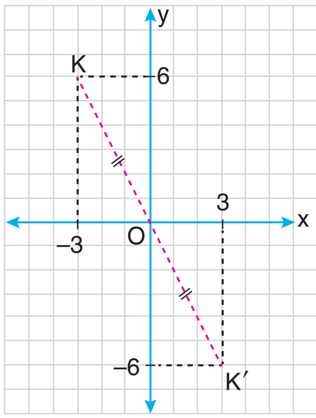
Aradığımız nokta $K'(x',y')$ olsun.

Orijin orta nokta olur. Buna göre

$0=\dfrac{-3+x'}{2}$ ise $x'=3$

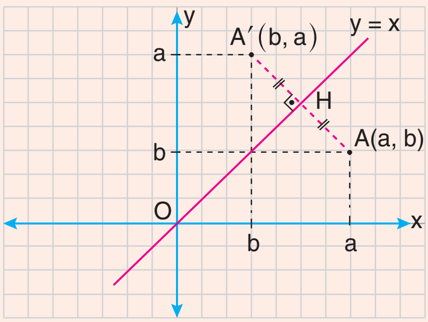
$0=\dfrac{6+y'}{2}$ ise $y'=-6$

$K'(x',y')=K'(3,-6)$ olur.



Koordinat sisteminde $A(a,b)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği, $A'(b,a)$ noktasıdır.

Koordinat sisteminde $y=x$ doğrusuna, 1. açıortay doğrusu da denir.



Örnek

$A(2,3)$, $B(-1,3)$, $C(4,-2)$ noktalarının $y=x$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntülerini bulalım.

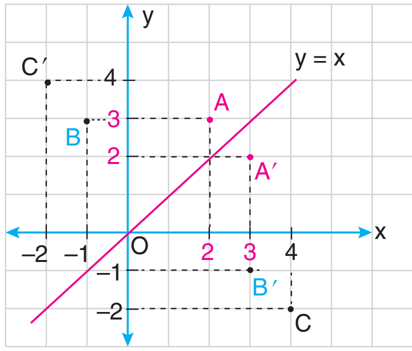
Çözüm

A, B ve C noktalarının görüntüleri sırası ile A', B' ve C' noktaları olsun.

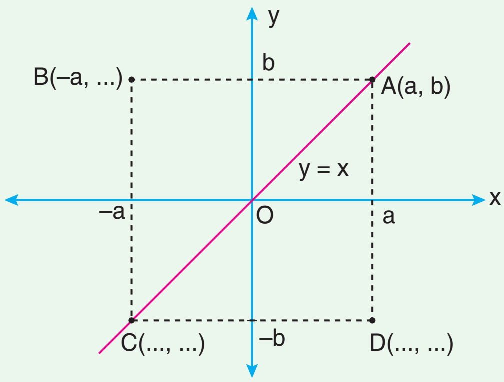
$A(2,3)$ ise $A'(3,2)$

$B(-1,3)$ ise $B'(3,-1)$

$C(4,-2)$ ise $C'(-2,4)$ olur.



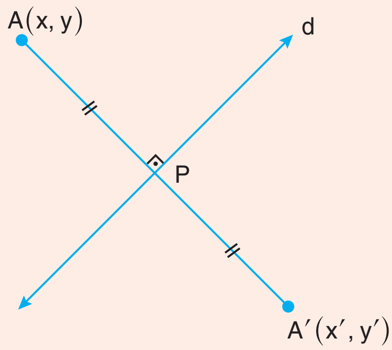
Yandaki şekilde ABCD bir karedir. Buna göre noktalı yerleri doldurarak A noktasının sırası ile x eksenine, y eksenine, orjine ve $y = x$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulunuz.



$A(x, y)$ noktasının, $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(x', y')$ olsun.

P noktası $A(x, y)$ ile $A'(x', y')$ noktalarının orta noktasıdır. P noktası d doğrusu üzerinde olduğundan d doğrusunun denklemini sağlar.

$[AA']$ nın eğimi ile d nin eğimlerinin çarpımı -1 dir.



Örnek

$A(2,3)$ noktasının, $d: 2x - 4y + 3 = 0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım.

Çözüm

A noktasının d doğrusuna göre simetriği A' olsun. d doğrusunun eğimi, $m_d = -\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{2}$ dir.

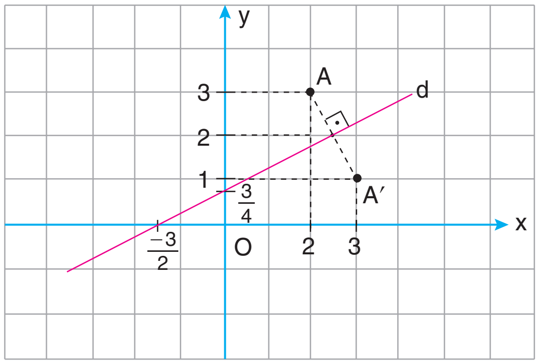
$d \perp AA'$ olduğundan $m_d \cdot m_{AA'} = -1 \Rightarrow m_{AA'} = -2$ olur.

Eğimi -2 olan ve $A(2,3)$ noktasından geçen AA' doğrusunun denklemi,

$y-3=-2(x-2) \Rightarrow y-3=-2x+4 \Rightarrow -2x-y+7=0$ olur.

d doğrusu ile AA' doğrusunun kesişimi olan $P(x, y)$ noktasının koordinatlarını bulalım.

$$\begin{array}{r} 2x-4y+3=0 \\ -2x-y+7=0 \\ \hline + \quad -5y+10=0 \end{array} \Rightarrow y=2 \text{ olur.}$$



2. denklemde, $y=2$ değerini yerine yazalım.

$-2x-2+7=0$

$-2x+5=0$

$x=\dfrac{5}{2}$ olur.

Buna göre $P\left(\dfrac{5}{2},2\right)$ olur.

A noktasının P noktasına göre simetriği,

$A'(x',y')=2P-A(x,y) \Rightarrow x'=2\cdot\dfrac{5}{2}-2=3$ ve $y'=2\cdot2-3=1$ olur.

Buradan $A'(3,1)$ bulunur.

Örnek

$A(-2,3)$ noktasının, $y=x+1$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım.

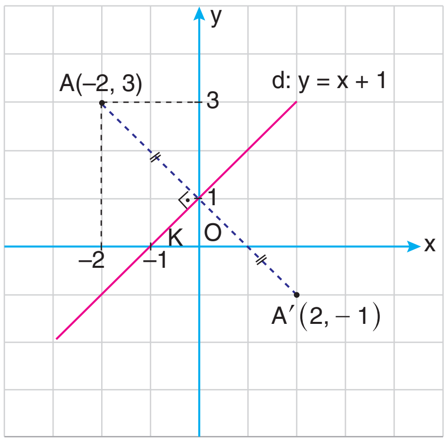
Çözüm

$m_d=1$ ve $m_{AA'}\cdot m_d=-1$ olduğundan

$m_{AA'}\cdot 1=-1$ ise $m_{AA'}=-1$ olur.

Eğimi -1 olan ve $A(-2,3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$y-3=-1\cdot(x+2)$ ise $AA': y=-x+1$ olur. $y=x+1$ ve $y=-x+1$ doğrularının kesim noktası,



$$\left.\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=-x+1 \end{array}\right\} \text{ ise } \begin{array}{r} -x+y-1=0 \\ x+y-1=0 \\ \hline + \quad 2y=2 \end{array} \text{ ise } y=1,\ x=0$$

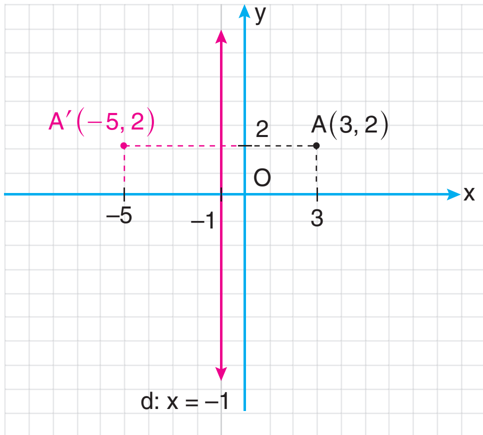
olduğundan A ve A′ noktalarının orta noktası $K(0,1)$ noktasıdır. Buna göre $K(0,1)$ orta nokta olduğundan $0=\dfrac{-2+x'}{2}$ ise $x'=2$

$1=\dfrac{3+y'}{2}$ ise $y'=-1$ olduğundan $A'(x',y')=A'(2,-1)$ dir.

Örnek

$A(3, 2)$ noktasının, $x = -1$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım.

Çözüm



$A(x, y)$ noktasının yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $A(x', y')$ noktası olsun.

$x = -1$ doğrusu y eksenine paralel olduğundan A ve A′ noktalarının orta noktasının apsisi $x = -1$ olur. Buna göre $-1 = \dfrac{x' + 3}{2}$ ise $x' = -5$ olur. Buradan $A'(x', y') = A'(-5, 2)$ dir.

Örnek

Aşağıda verilen noktaların $x = 3$ doğrusuna göre yansımalarını bulalım.

a) $A(4, 2)$ **b)** $B(-1, 4)$ **c)** $C(-5, 0)$ **ç)** $O(0, 0)$

Çözüm

a) $A(4, 2) \longrightarrow A'(2 \cdot 3 - 4, 2) = A'(2, 2)$

b) $B(-1, 4) \longrightarrow B'(2 \cdot 3 - (-1), 4) = B'(7, 4)$

c) $C(-5, 0) \longrightarrow C'(2 \cdot 3 - (-5), 0) = C'(11, 0)$

ç) $O(0, 0) \longrightarrow O'(2 \cdot 3 - 0, 0) = O'(6, 0)$

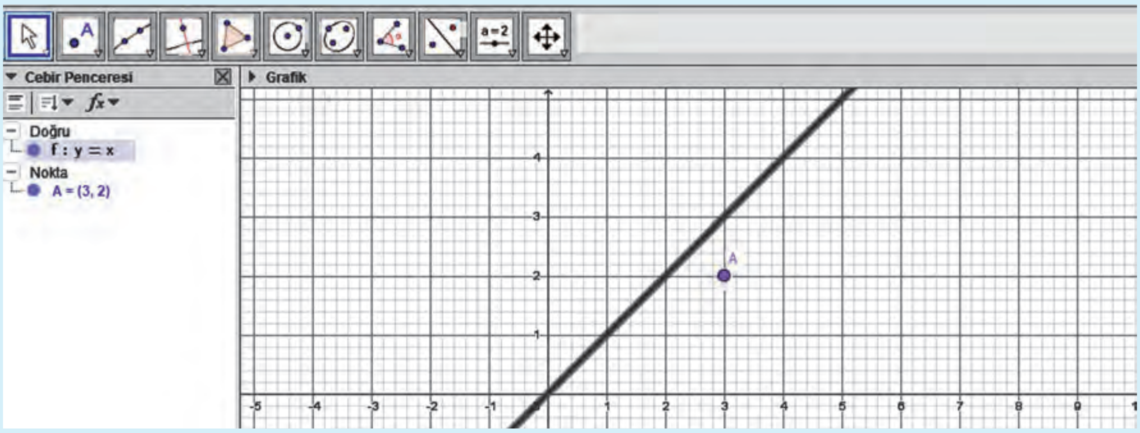
SONUÇ

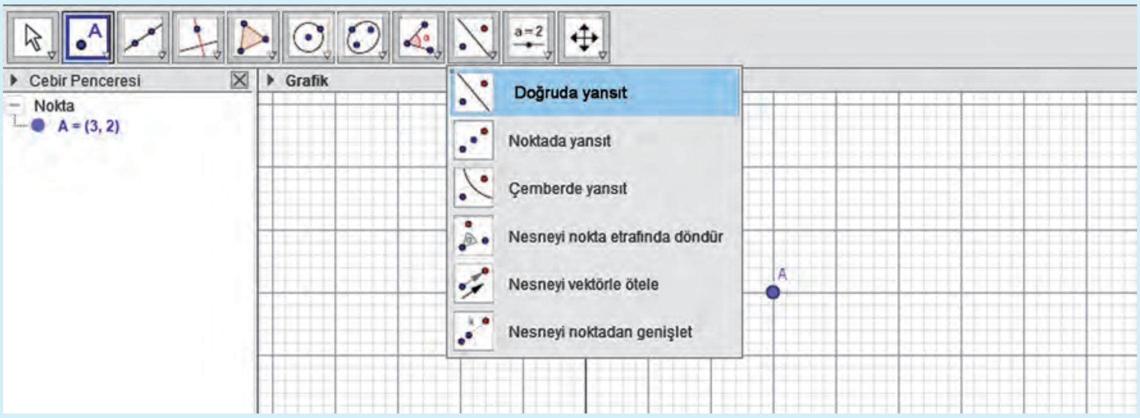
Bir noktanın y eksenine paralel bir doğruya göre yansıma dönüşümünde ordinat değişmez.

GeoGebra programını açarak $y = x$ doğrusu oluşturalım. $y = x$ doğrusu programda fonksiyon giriş alanına yazılarak oluşturulur.



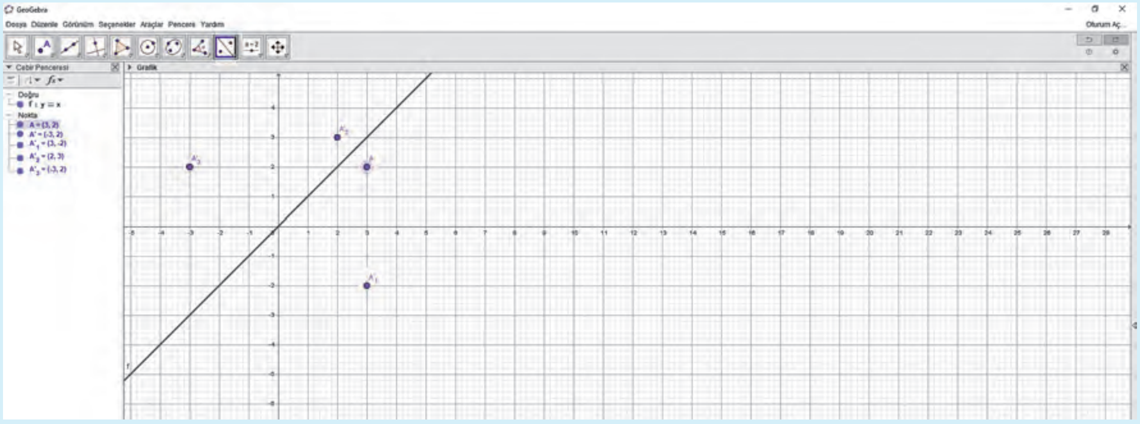
Şekildeki koordinat sistemi üzerinde bir A noktası işaretleyelim.



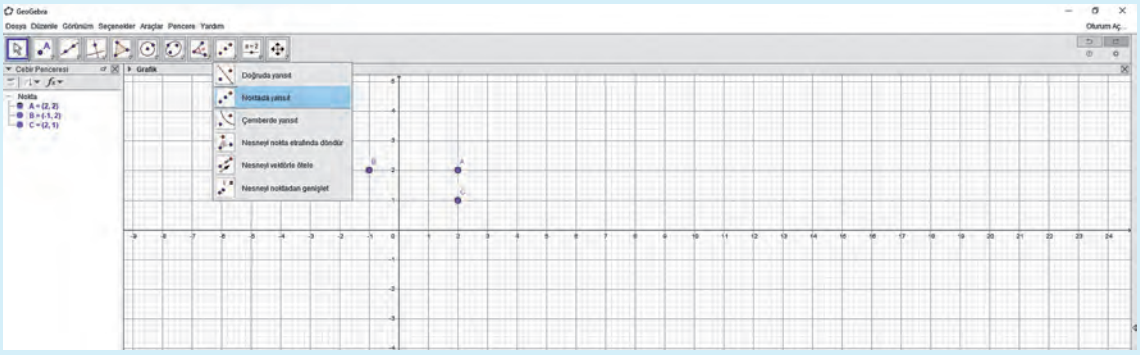


Doğruda yansıt menüsünü kullanarak A noktasının $y = x$ doğrusuna göre yansımasını bulalım. Önce noktaya ardından $y = x$ doğrusuna tıklayarak bu işlemi gerçekleştirebiliriz.

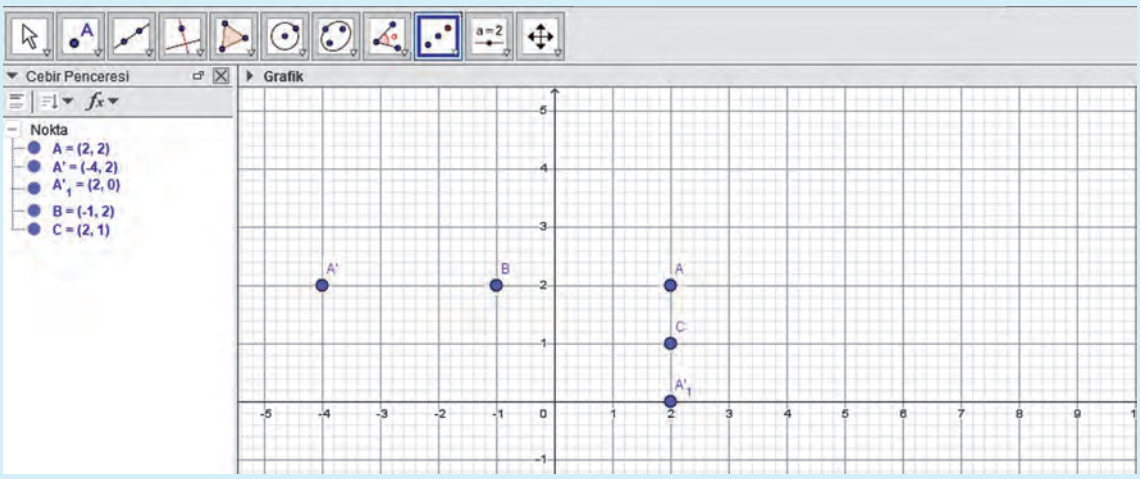
Farklı noktalarla aynı uygulamayı yapalım.



Bir B noktası işaretleyelim.



Noktada yansıt menüsünü kullanarak A noktasının B noktasına göre yansımasını alalım.

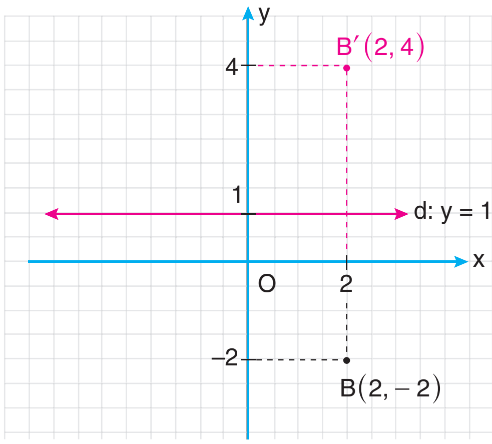


Farklı noktalarla yansıma uygulamaları yapınız.

Örnek

$B(2,-2)$ noktasının, $y=1$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım.

Çözüm



$B(x, y)$ noktasının yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü $B'(x', y')$ noktası olsun.

$y=1$ doğrusu x eksenine paraleldir. Buna göre

B ve B′ noktalarının orta noktalarının ordinatı $y=1$ olur.

$1=\dfrac{-2+y'}{2}$ ise $y'=4$ tür. Buradan $B'(x', y')=B'(2,4)$ bulunur.

Örnek

Aşağıda verilen noktaların y = 1 doğrusuna göre yansımalarını bulalım.

a) $A(-1,1)$ **b)** $B(5,0)$ **c)** $C(0,2)$

Çözüm

a) $A(-1,1) \longrightarrow A'(-1, 2\cdot1-1)=A'(-1,1)$

b) $B(5,0) \longrightarrow B'(5, 2\cdot1-0)=B'(5,2)$

c) $C(0,2) \longrightarrow C'(0, 2\cdot1-2)=C'(0,0)$

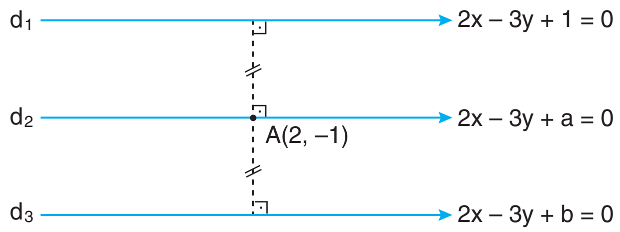
SONUÇ

Bir noktanın x eksenine paralel bir doğruya göre yansıma dönüşümünde apsis değişmez.

Örnek

$2x - 3y + 1 = 0$ doğrusunun, $A(2, -1)$ noktasına göre yansımasını bulalım.

Çözüm



Aranan doğru d_1 doğrusuna paralel olan bir doğrudur. Bu doğruya A noktasından geçen üçüncü bir paralel doğru çizilirse bu doğru d_1 ve d_3 doğrusuna paralel olur.

$d_1 // d_2 // d_3$ ise $d_2: 2x - 3y + a = 0$

$d_3: 2x - 3y + b = 0$

şeklinde olmalıdır.

$A(2, -1)$, d_2 denklemini sağladığına göre

$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + a = 0$ ise $a = -7$ olur.

d_1 ve d_3 doğruları d_2 doğrusuna eşit uzaklıkta olduğundan

$a = \frac{b+1}{2}$ ise $b = 2a - 1$ ise $b = 2 \cdot (-7) - 1 = -15$ olur.

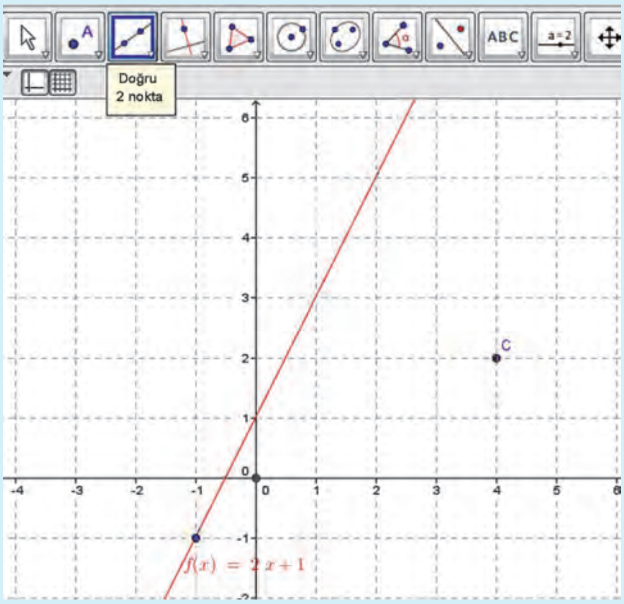
O hâlde, aradığımız doğru,

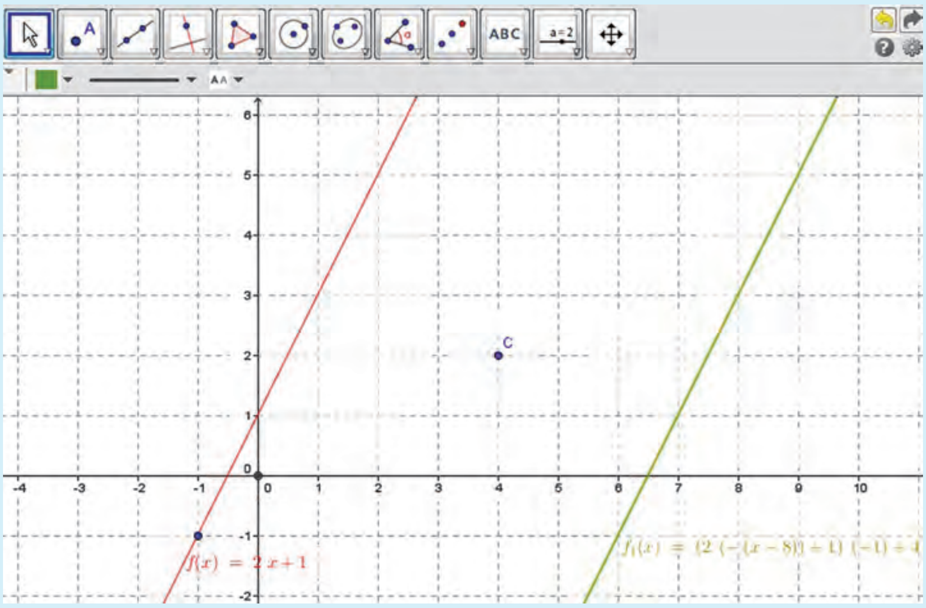
$d_3: 2x - 3y - 15 = 0$ doğrusudur.

Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz.

• $f(x) = 2x + 1$ doğrusunun $C(4, 2)$ noktasına göre yansımasını bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak çizelim.

• $C(4, 2)$ noktasını ve $f(x) = 2x + 1$ doğrusunu oluşturalım.





• Yansıma menüsünden yararlanarak $f(x) = 2x + 1$ doğrusunun $C(4, 2)$ noktasına göre yansımasını oluşturalım. Yukarıdaki $f_1(x)$ doğrusu elde edilir.

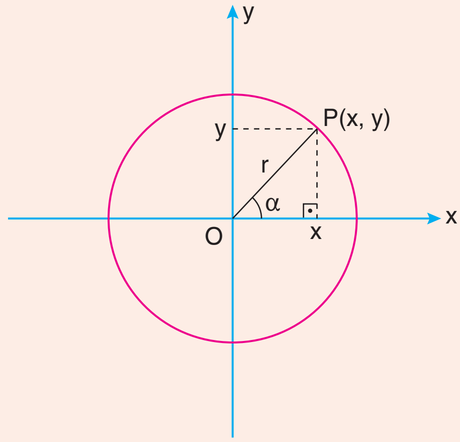
Bir Noktanın Dönme Dönüşümü Altındaki Görüntüsü

Düzlemde bir P noktasının (x, y) koordinatları ve $[OP$ ışınının x ekseni ile yaptığı açı verilsin.

$|OP| = r$ olmak üzere P nin koordinatları

$x = r \cdot \cos\alpha$

$y = r \cdot \sin\alpha$ olur.



P noktasının, O (orijin) etrafında θ açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen nokta $P'(x', y')$ olsun.

$x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta)$

$y' = r \cdot \sin(\alpha + \theta)$ olur. Buna göre

$x' = r \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta)$

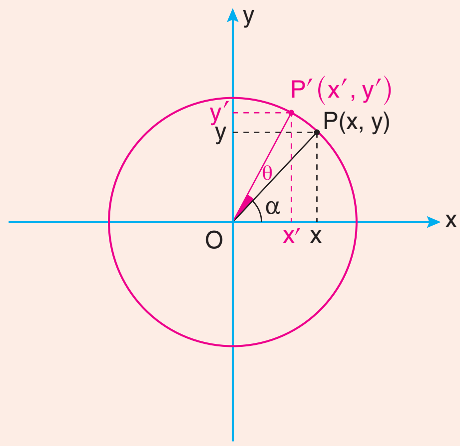
$= \underbrace{r \cdot \cos\alpha}_{x} \cdot \cos\theta - \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{y} \cdot \sin\theta$

$= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$

$y' = r \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\theta)$

$y = \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{y} \cdot \cos\theta + \underbrace{r \cdot \cos\alpha}_{x} \cdot \sin\theta$

$= y \cdot \cos\theta + x \cdot \sin\theta$



olduğundan P′ noktası,

$P' = R_\theta(P) = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta,\ x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta)$ olur.

θ açısı kadar dönme dönüşümü R_θ ile gösterilir.

Örnek

Analitik düzlemde $A(3, -5)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde, 90°lik dönme dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım.

Çözüm

A noktasının 90° lik dönme dönüşümü altındaki görüntüsü A' olmak üzere

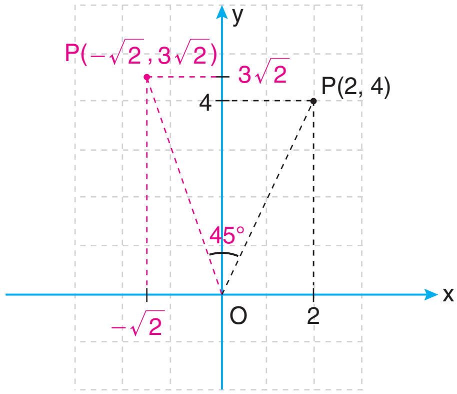
$A' = R_{90^\circ}(3, -5) = (3 \cdot \cos 90^\circ - (-5) \cdot \sin 90^\circ,\ 3 \cdot \sin 90^\circ + (-5) \cdot \cos 90^\circ)$

$= (3 \cdot 0 - (-5) \cdot 1\ ,\ 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 0) = (5, 3)$ bulunur.

Örnek

$P(2,4)$ noktası orijin etrafında pozitif yönde, 45° döndürülüyor. Elde edilen P′ noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm



$\theta = 45°$

$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$

$= 2 \cdot \cos 45° - 4 \cdot \sin 45°$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$

$= 2 \cdot \sin 45° + 4 \cdot \cos 45°$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

olduğundan $R_{45°}(P) = P'(x', y') = P'(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$ olur.

Örnek

$P(2,-3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde, 270° döndürülmesi ile elde edilen p′ noktasını bulalım.

Çözüm

$\theta = 270°$ ve $P(2,-3)$ olduğundan

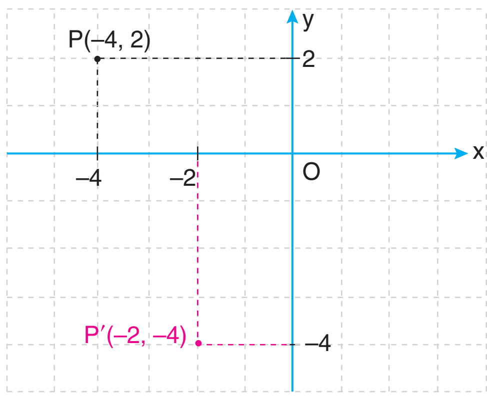
$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta = 2 \cdot \cos 270° + 3 \cdot \sin 270° = -3$

$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta = 2 \cdot \sin 270° - 3 \cdot \cos 270° = -2$ Buna göre $P'(-3,-2)$ olur.

Örnek

$P(-4,2)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde, 90° döndürülmesi dönüşümü ile elde edilen P′ noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm



$\theta = 90°$

$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$

$= -4 \cdot \cos 90° - 2 \cdot \sin 90° = -4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$

$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$

$= -4 \cdot \sin 90° + 2 \cdot \cos 90° = -4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -4$

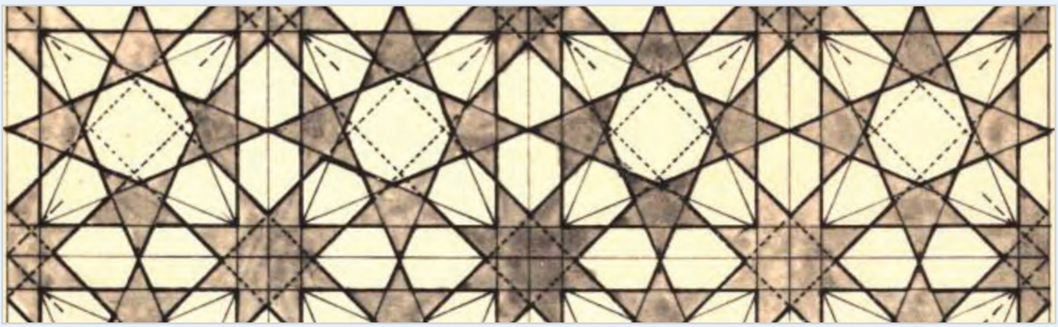
olduğundan $P'(x', y') = P'(-2,-4)$ olur.

SONUÇ

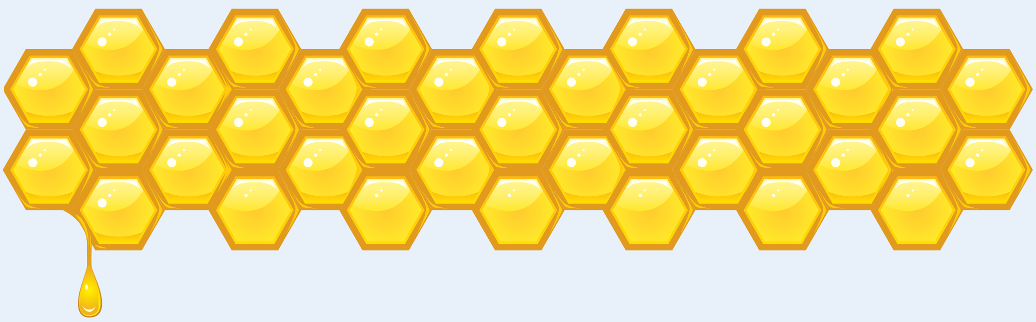
Koordinatlarından biri $A(a,b)$ olan bir noktayı,
orijin etrafında pozitif (saat yönünün tersi) yönde $90°$ döndürdüğümüzde $A'(-b,a)$ noktası,
orijin etrafında pozitif (saat yönünün tersi) yönde $180°$ döndürdüğümüzde $A''(-a,-b)$ koordinatı,
orijin etrafında pozitif (saat yönünün tersi) yönde $270°$ döndürdüğümüzde $A'''(b,-a)$ koordinatı,
orijin etrafında pozitif (saat yönünün tersi) yönde $360°$ döndürdüğümüzde ise $A(a,b)$ noktası elde edilir. $360°$ dönmede $A(a,b)$ koordinatı değişmez.

4.1.2. Öteleme, Yansıma, Dönme ve Bunların Bileşkeleriyle İlgili Uygulamalar

Anadolu Selçuklu sanatında geometrik süsleme bir düzen içindedir. Birbirini kesen altıgen şeritler, yıldız ve örgülü dekorlar, geçmeli dekorlar geometrik kompozisyonu oluşturur. Bu dekorlar, küçük kare, baklava, dörtgen, düzgün yıldız, çokgen biçimli parçalardan oluşur. Bu geometrik süslemeler oluşturulurken öteleme, yansıma ve dönme dönüşümlerinin sık sık kullanıldığı görülmektedir. Çevremizden de bu dönüşümlere çeşitli örnekler verilebilir.



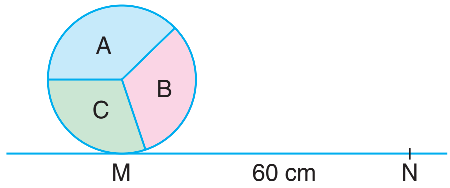
Çizgi ile geliştirilmiş geometrik desen örneği



Yukarıdaki resimlerde kullanılan dönüşümleri açıklayınız.

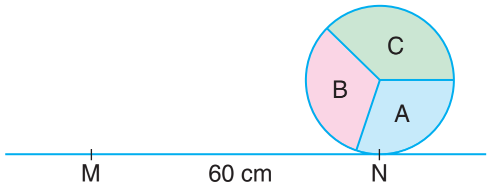
Örnek

Şekildeki dairenin çevresi 24 cm ve $|MN| = 60$ cm dir. Daire, M noktasından saat yönünde döndürülerek getirilip N noktasında durduruluyor. N noktasında, dairenin konumu ne olur? Bulalım.



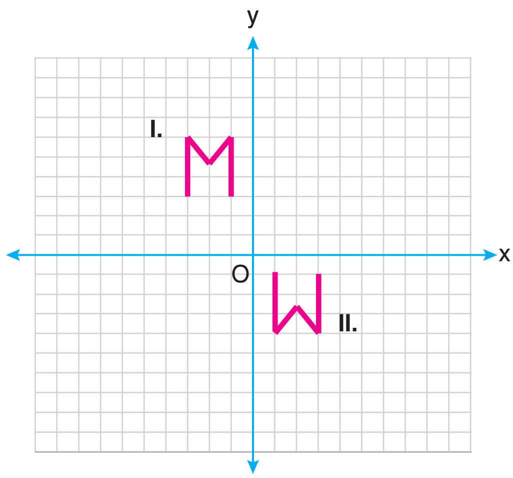
Çözüm

$\frac{60}{24} = 2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ olduğundan daire 2 tam ve bir yarım dönme hareketi yapmıştır. Buna göre tekerleğin N noktasındaki konumu yandaki gibi olur.



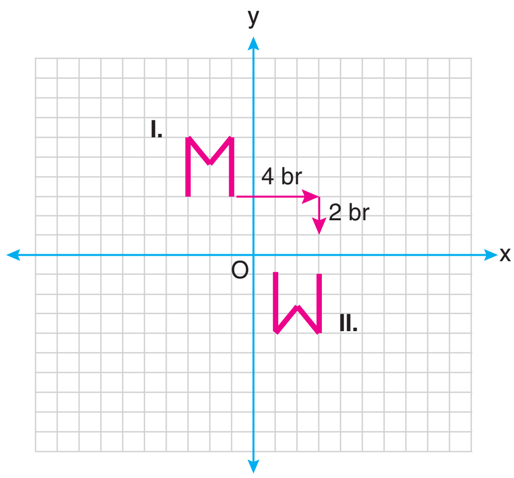
Örnek

Yandaki analitik düzlemde, M harfi I. durumdan II. duruma getirilmiştir. Buna göre M harfine uygulanan dönüşüm hareketlerini açıklayalım.



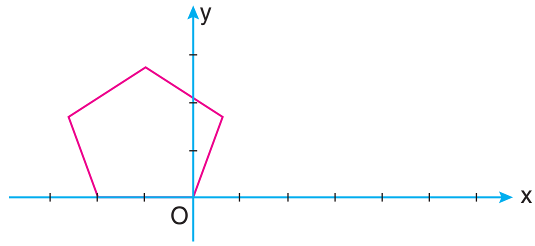
Çözüm

M harfi x ekseni boyunca sağa doğru 4 br, y ekseni boyunca aşağı doğru 2 br ötelendikten sonra x eksenine göre yansıması alınmıştır.



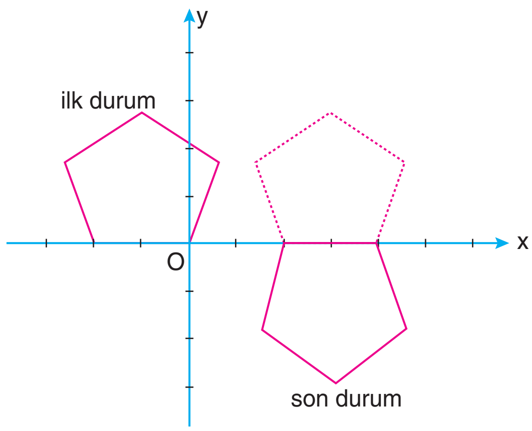
Örnek

Şekilde kenar uzunluğu 2 br olan düzgün beşgeni x ekseni boyunca 4 br sağa öteleyip x eksenine göre yansımasını çizelim.



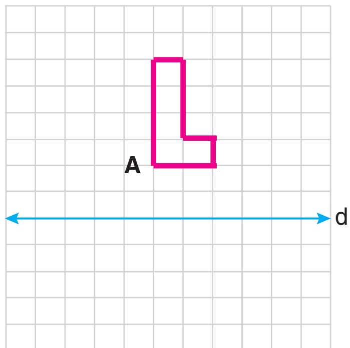
Çözüm

Düzgün beşgeni x ekseni boyunca 4 br sağa doğru kaydırıp x eksenine göre simetriğini almalıyız. Buna göre yandaki şekil elde edilir.



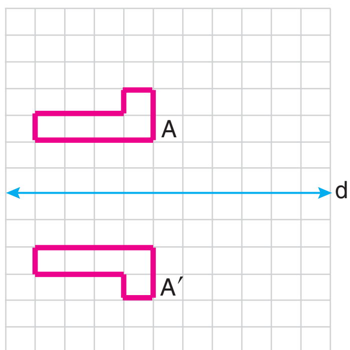
Örnek

Yandaki şekli A noktası etrafında saat yönünün tersine doğru 90° döndürüldükten sonra d doğrusuna göre yansımasını çizelim.



Çözüm

Şeklin A noktası etrafında saat yönünün tersine 90° döndürüldükten sonra d doğrusuna göre simetriği yandaki gibi olur.



SONUÇ

Bir şeklin bir doğru boyunca ötelenip sonra yansımasına veya önce yansıması alınıp sonra ötelenmesine **ötelemeli yansıma** denir.

Örnek

Analitik düzlemde, köşe noktalarının koordinatları $A(6,6)$, $B(6,3)$ ve $C(0,3)$ olan üçgenin orijin etrafında saat yönünün tersinde 180° döndürülmesi ile elde edilen görüntünün koordinatlarını bularak çizelim.

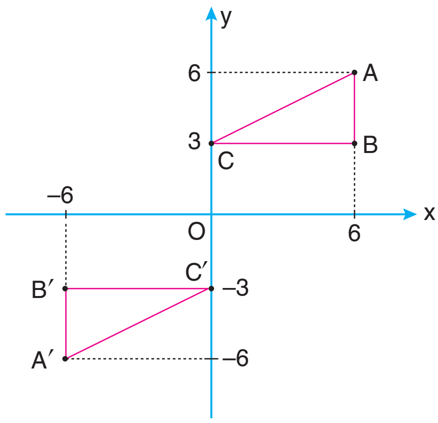
Çözüm

Orijin etrafında 180°lik dönme:

$A_{R180°}(6,6) \rightarrow A'(-6,-6)$

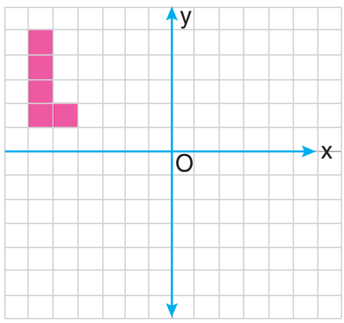
$B_{R180°}(6,3) \rightarrow B'(-6,-3)$

$C_{R180°}(0,3) \rightarrow C'(0,-3)$ olur.



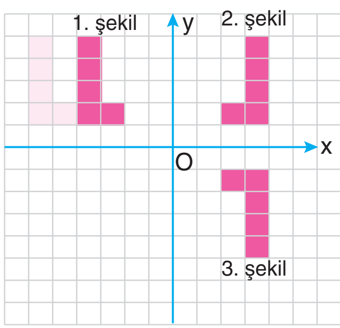
Örnek

Yandaki şekli 2 br sağa öteleyip y eksenine göre yansımasını aldıktan sonra, x eksenine göre yansımasını bulalım.



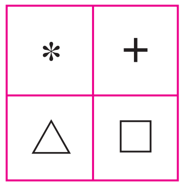
Çözüm

Verilen şeklin 2 br sağa ötelenmişi 1. şekil, y eksenine göre yansıması 2. şekil, x eksenine göre yansıması 3. şekildeki gibidir.



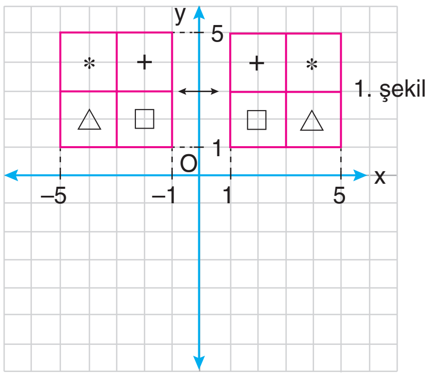
Örnek

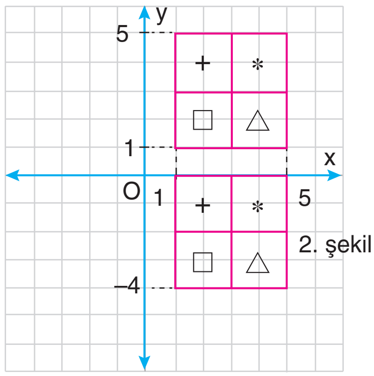
Yandaki şekil analitik düzlemde $(-1,1),(-5,1),(-1,5),(-5,5)$ noktaları arasına yerleştirilip y eksenine göre yansıması alındıktan sonra y ekseni boyunca aşağı doğru 5 br. öteleniyor. Şeklin son görüntüsünü çizelim.



Çözüm

Verilen şekli analitik düzlemde göstererek istenilen dönüşümleri uygulayalım.

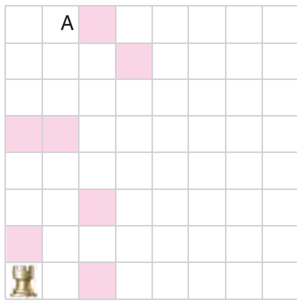




Şeklin y eksenine göre yansıması 1. şekil, y ekseni boyunca aşağı doğru öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü 2. şekildir.

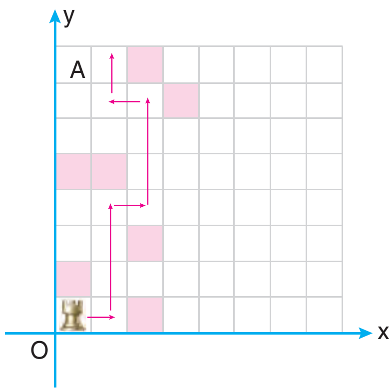
Örnek

Satranç oyununda kale sadece sağa, sola, öne ve arkaya doğru hareket edebilmektedir. Yandaki satranç tahtasında boyalı bölgelerdeki taşlar sabit kalmak şartı ile kalenin A noktasına en kısa yoldan ulaşması istenilirse kaleye hangi dönüşümlerin uygulanması gerekir?



Çözüm

Kalenin bulunduğu köşeyi orijin kabul ederek verilen şekli analitik düzlemde gösterelim. Buna göre sırası ile x ekseni boyunca pozitif yönde 1 br öteleme dönüşümü, y ekseni boyunca 3 br pozitif yönde öteleme dönüşümü, x ekseni boyunca 1 br pozitif yönde öteleme dönüşümü, y ekseni boyunca 3 br pozitif yönde öteleme dönüşümü, x ekseni boyunca 1 br negatif yönde öteleme dönüşümü ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 br öteleme dönüşümü uygulanması gerekir.



UYGULAYALIM

1. Analitik düzlemde, $A(-2,3)$ noktasının aşağıdaki öteleme dönüşümleri altındaki görüntülerinin koordinatlarını bulunuz.

a) 2 br sağa, 1 br yukarı

b) 3 br sola, 2 br aşağı

c) 1 br aşağı, 4 br sola

ç) 3 br yukarı, 2 br sağa

d) 5 br sağa, 5 br aşağı

2. $A(-3,-2)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 6 br, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 br ötelenmişi olan A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

3. Bir A noktasının 4 br sağa, 2 br yukarıya ötelenmişi $A'(2,-2)$ noktası olduğuna göre A noktasının koordinatlarını bulunuz.

4. Analitik düzlemde bir B noktasının 4 br sağa ve 2 br yukarı ötelenmesi ile elde edilen görüntüsü $B'(-2,3)$ noktası olduğuna göre B noktasının koordinatlarını bulunuz.

5. Analitik düzlemde, aşağıda verilen noktaların x eksenine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntülerinin koordinatlarını bulunuz.

a) $A(1,5)$ **b)** $B(-2,3)$ **c)** $C(3,-2)$ **ç)** $D(-2,4)$ **d)** $E(0,5)$

6. $P(2,5)$, $R(-3,4)$, $S(1,2)$ noktalarının $y=x$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntülerini bulunuz.

7. Analitik düzlemde bir P noktasının $A(3,12)$ noktasına göre yansıması $P'(1,-5)$ noktasıdır. Buna göre P noktasının koordinatlarını bulunuz.

8. $A(-5,-6)$ noktasının $B(2,4)$ noktasına göre yansımasını bulunuz.

9. Analitik düzlemde, $M(-2,4)$ noktasının orijine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulunuz.

10. $A(-2,-4)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde, 30° döndürülmesi sonucu oluşan A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

11. $A(4,4)$ noktasının;

a. $B(-2,4)$ noktasına göre

b. x eksenine göre

c. y eksenine göre

ç. $x=2$ doğrusuna göre

d. $y=-2$ doğrusuna göre

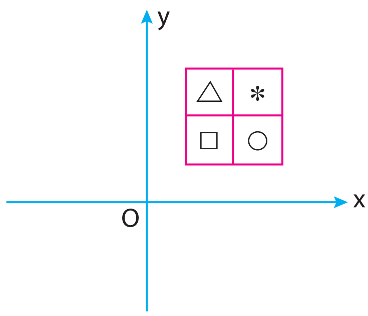
e. $d: 3x-5y+6=0$ doğrusuna göre yansıması olan noktaların koordinatlarını bulunuz.

12. $A(-4,-6)$ noktasının $d: 6x-8y+12=0$ doğrusuna göre yansıması olan nokta A' olmak üzere $|AA'|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

13. Analitik düzlemde, $A(2,6)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülmesi dönüşümü sonucunda elde edilen görüntünün koordinatlarını bulunuz.

14. $B(-4,-2)$ noktasının orijin etrafında, sırası ile pozitif yönde, 90°, 180°, 270° ve 360° döndürülmesi ile elde edilen görüntünün koordinatlarını bulunuz.

15. Yandaki analitik düzlemde verilen şeklin orijin etrafında saat yönünün tersine 270°lik dönme hareketiyle elde edilen şeklini çiziniz.



16. Analitik düzlemde verilen noktalara,

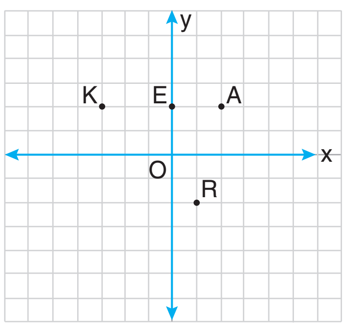
K: x eksenine göre yansıma

R: y eksenine göre yansıma

E: 4 br aşağı öteleme

A: Orijine göre yansıma

dönüşüm hareketleri uygulanıyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi elde edilir?



A) AREK B) KERA C) KARE D) RAKE E) ERRA

4. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Analitik düzlemde $(2,-5)$ noktasının y eksenine göre yansıması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2,-5)$ B) $(2,5)$ C) $(-2,5)$ D) $(5,-2)$ E) $(-5,2)$

2. Analitik düzlemde $(4,-2)$ noktasının $x=2$ doğrusuna göre yansıması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-4,-2)$ B) $(-2,2)$ C) $(0,-2)$ D) $(-2,0)$ E) $(-2,4)$

3. $(2,4)$ noktasının orijin etrafında, saat yönünün tersine 30° döndürülmesi ile elde edilen nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ B) $(\sqrt{3}-2,2\sqrt{3}+1)$ C) $(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$

D) $(2-\sqrt{3},1-\sqrt{3})$ E) $(\sqrt{3}+2,2\sqrt{3}-1)$

4. $A(3,0)$ noktasının $3x-2y-4=0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{4}{\sqrt{13}}\right)$ B) $\left(\frac{9}{\sqrt{13}},\frac{20}{\sqrt{13}}\right)$ C) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ D) $\left(\frac{9}{13},\frac{20}{13}\right)$ E) $\left(\frac{20}{13},\frac{9}{13}\right)$

5. Analitik düzlemde $(-1,-3)$ noktasının $(2,-4)$ noktasına göre yansıması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1,1)$ B) $(2,-1)$ C) $(5,0)$ D) $(-5,5)$ E) $(5,-5)$

6. $(4,-3)$ noktasının $y=-x$ doğrusuna göre yansıması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3,-4)$ B) $(-3,4)$ C) $(-3,-4)$ D) $(-4,-3)$ E) $(4,3)$

7. Analitik düzlemde bir $A(x, y)$ noktası orijin etrafında, saat yönünün tersine 90° döndürülerek $A'(3, 2)$ noktası elde ediliyor. Buna göre noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

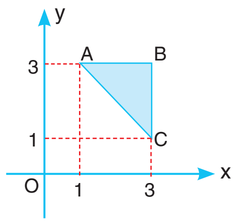
A) $A(-3, 2)$ B) $A(3, 2)$ C) $A(2, -3)$ D) $A(-2, -3)$ E) $(-3, -2)$

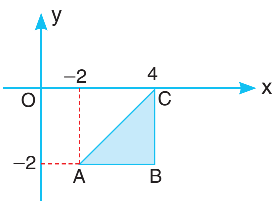
8. Şekildeki dönme dolabın 1. oturağına bir müşteri bindikten sonra dönme dolabı yavaş yavaş hareket ettirilerek müşteri alınmaya devam ediliyor. Dönme dolabı saat yönünün tersine 120° döndürülüp durdurulduğunda kaçıncı müşteri alınmış olur?

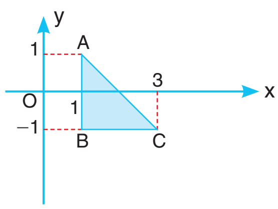


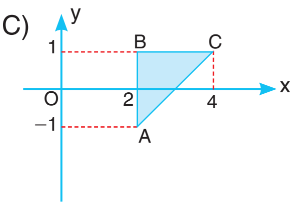
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

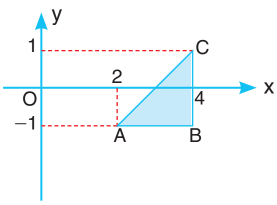
9. Şekildeki ABC üçgeni 1 birim sağa, 2 birim aşağıya ötelenip üçgenin x eksenine yansıması alınırsa aşağıdaki şekillerden hangisi elde edilir?

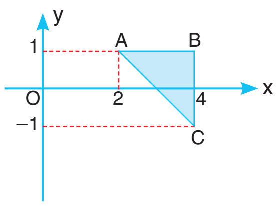


A)


B)


C)


D)


E)


10. $A(2\sqrt{2}\ ,\ 6\sqrt{2})$ noktası orijin etrafında 45° döndürüldükten sonra x ekseni boyunca negatif yönde 2 br, y ekseni boyunca negatif yönde 3 br öteleniyor. Elde edilen noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-5, -5)$ B) $(-5, -4)$ C) $(5, 0)$ D) $(-6, -5)$ E) $(-6, 5)$

SAYILAR VE CEBİR

TÜREV

5. ÜNİTE

5. TÜREV

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

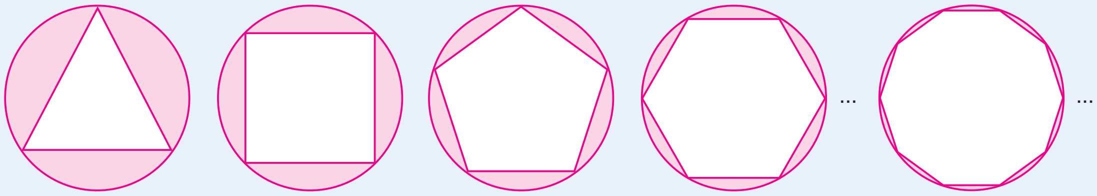
5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI



5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

Aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi üçgen, kare, düzgün beşgen, düzgün altıgen, ..., n kenarlı düzgün çokgenin eşit yarıçaplı çember içerisine sırasıyla yerleştirildiğini düşünelim.



Her bir yerleşimde çember yayı ile kirişler arasında kalan alana dikkat ediniz. Kolaylıkla görülebilir ki n kenarlı düzgün çokgenin kenar sayısı arttıkça çember yayı ile kiriş arasında kalan alan azalmaktadır. Yeterince büyük n değeri için çember ile içine yerleştirilen n kenarlı düzgün çokgen çakışacaktır. Dolayısıyla kenar sayısı limit değerine ulaştığında çember elde edilecektir.

5.1.1. Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Soldan ve Sağdan Limiti

x değişkeni bir a sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **soldan yaklaşma,** a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **sağdan yaklaşma** denir. x değişkeninin a sayısına soldan yaklaşması $x \to a^-$, sağdan yaklaşması $x \to a^+$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki tabloda x değişkeninin 5 sayısına, 5 ten küçük ve 5 ten büyük sayılarla yaklaşması gösterilmiştir.

$\longrightarrow 5 \longleftarrow$

x	4,5	4,9	4,99	4,999	4,9999	...	...	5,0001	5,001	5,01	5,1	5,5

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunda x değişkeni 3 e soldan ve sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin kaça yaklaştığını bulalım.

Çözüm

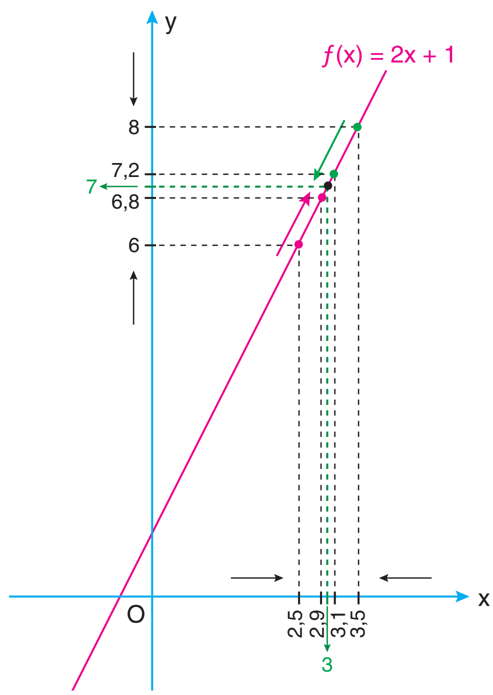
x, 3 e soldan yaklaşıyor → 3 ← x, 3 e sağdan yaklaşıyor

x	2,5	2,9	2,99	2,999	...	...	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x) = 2x + 1$	6	6,8	6,98	6,998	...	...	7,002	7,02	7,2	8

→ 7 ←

Tabloya göre $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunda x, 3 e soldan ve sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler 7 ye yaklaşmaktadır.

Grafik incelendiğinde x değişkeninin 3 e soldan ve sağdan yaklaştığında $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun aldığı değerlerin 7 ye yaklaştığı görülmektedir.



x değişkeni bir a reel sayısına soldan yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler ℓ_1 reel sayısına yaklaşıyorsa "$f(x)$ in $x = a$ daki soldan limiti ℓ_1 dir." denir ve $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni bir a reel sayısına sağdan yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler ℓ_2 reel sayısına yaklaşıyorsa "$f(x)$ in $x = a$ daki sağdan limiti ℓ_2 dir." denir ve $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2$ şeklinde gösterilir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki soldan ve sağdan limitini bulalım.

Çözüm

0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999	...	x (→ 1)
0,5	1,7	1,97	1,997	1,9997	...	$f(x) = 3x - 1$ (→ 2)

x değişkeni 1 e soldan yaklaşırken $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun aldığı değerler 2 ye yaklaşmaktadır. Buna göre $\lim_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2$ dir.

x (1 ←)	...	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,5
$f(x) = 3x - 1$ (2 ←)	...	2,0003	2,003	2,03	2,3	3,5

x değişkeni 1 e sağdan yaklaşırken $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun aldığı değerler 2 ye yaklaşmaktadır. Buna göre $\lim_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2$ olur.

$f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki sağdan limiti soldan limitine eşit ise fonksiyonun a noktasında limiti vardır.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ise $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ dir.

$f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki sağdan ve soldan limiti eşit değilse bu fonksiyonun a noktasında limiti yoktur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 3$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki limitini tablo ve grafikten yararlanarak bulalım.

Çözüm

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	...	2,001	2,01	2,1	2,2	2,5
$f(x) = 4x - 3$	3	3,8	4,6	4,96	4,996	...	...	5,004	5,04	5,4	5,8	7

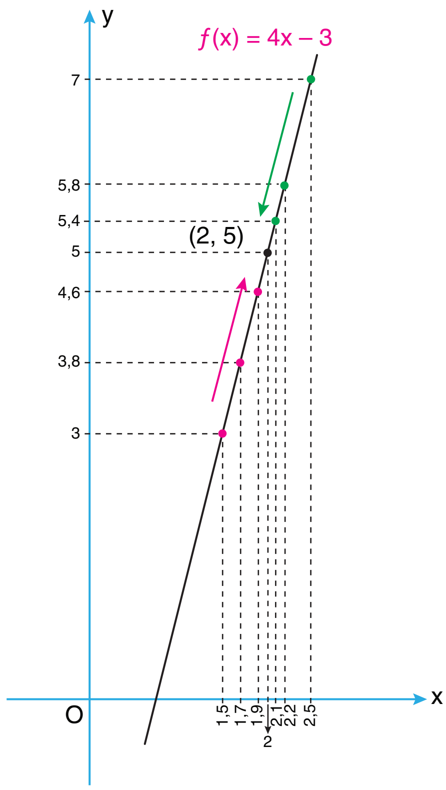
$\longrightarrow 5 \longleftarrow$

Tablo ve grafikte görüldüğü gibi $x \to 2^-$ ve $x \to 2^+$ iken $f(x) = 4x - 3$ fonksiyonunun aldığı değerler 5 e yaklaşmaktadır.

Bu durumda $f(x) = 4x - 3$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında limiti vardır.

$\lim\limits_{x \to 2^-} (4x - 3) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4x - 3)$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 2} (4x - 3) = 5$ olur.

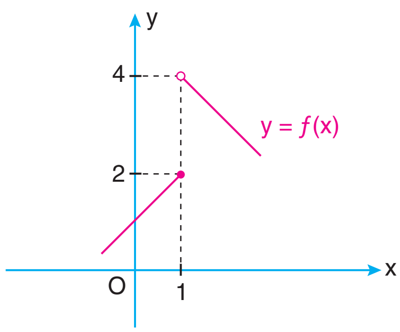


Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafiğe göre $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında;

a) soldan limitini,

b) sağdan limitini bulalım.



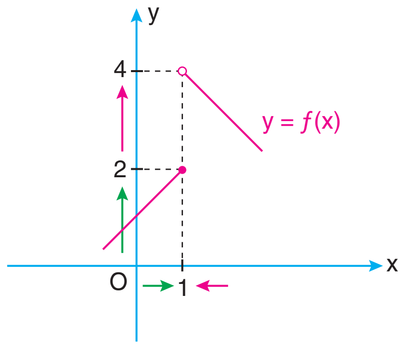
Çözüm

a) Grafik üzerinde x değişkeni 1 e soldan yaklaşırken $y = f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler 2 ye yaklaşmaktadır.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

b) x değişkeni 1 e sağdan yaklaşırken $y = f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler 4 e yaklaşmaktadır.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$



$f(x)$ fonksiyonunun soldan ve sağdan limiti vardır. Ancak $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

Örnek

$f(x) = 2$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm

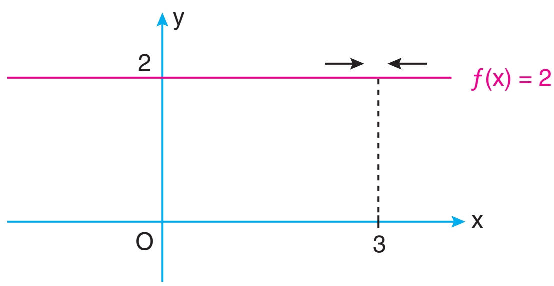
→ 3 ←

x	2,9	2,98	2,99	2,999	...	...	3,001	3,01	3,02	3,2
$f(x)$	2	2	2	2	...	...	2	2	2	2

→ 2 ←

$f(x) = 2$ sabit fonksiyon olduğundan x değişkeni 3 e soldan ve sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu daima 2 değerini alır. Buna göre

$\lim_{x \to 3^-} 2 = \lim_{x \to 3^+} 2$ olduğundan $\lim_{x \to 3} 2 = 2$ olur.



$c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \to a} c = c$ dir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki limitini bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak bulalım.

• Hesap makinesi yardımıyla aşağıdaki tabloyu her x değeri için $f(x)$ değerini bularak dolduralım.

→ 2 ←

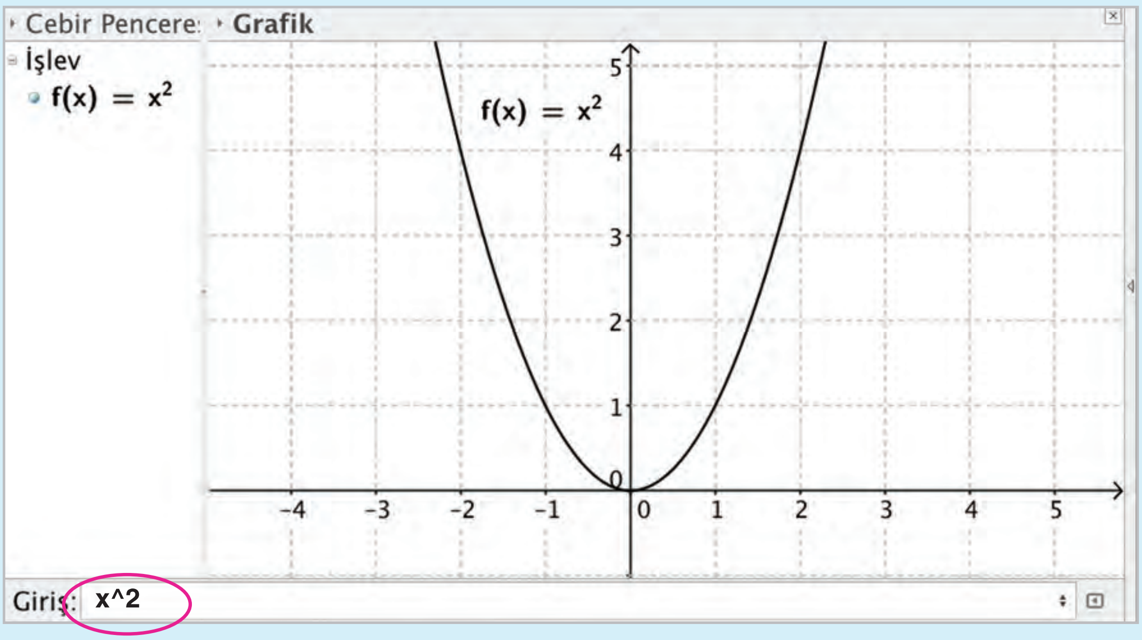
x	1,5	1,89	1,9	1,99	2,01	2,1	2,2	2,4
$f(x)$								

→ $f(x) = ...$ ←

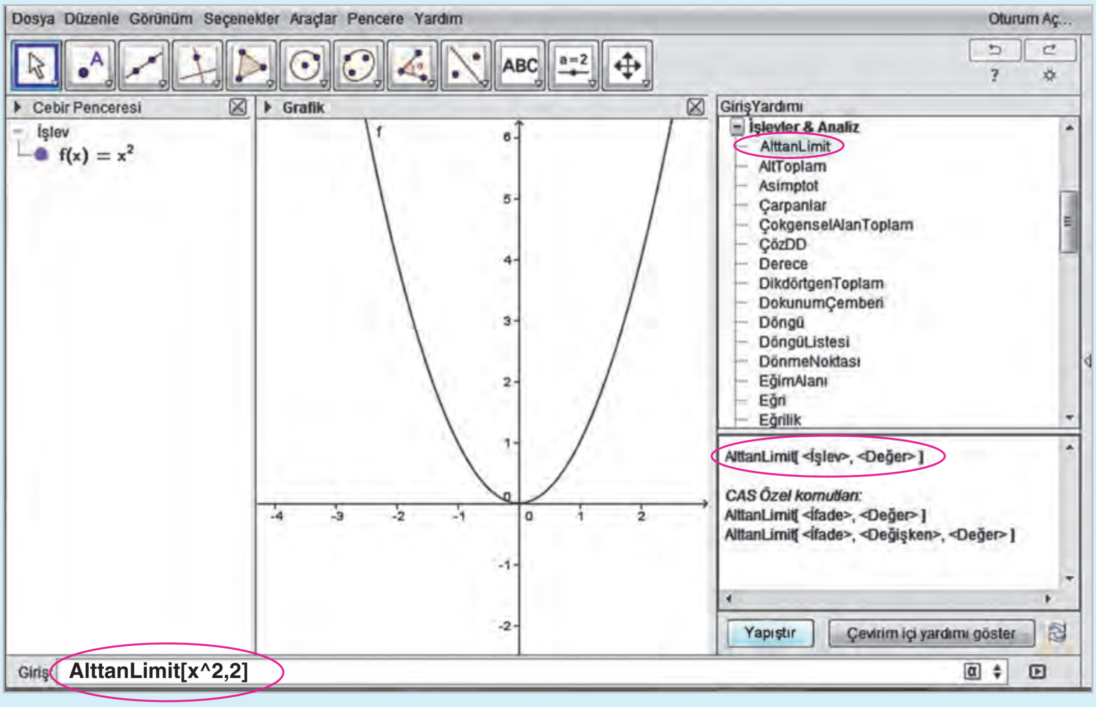
• x, 2 ye yaklaştıkça $f(x)$ in hangi sayıya yaklaştığını açıklayalım.



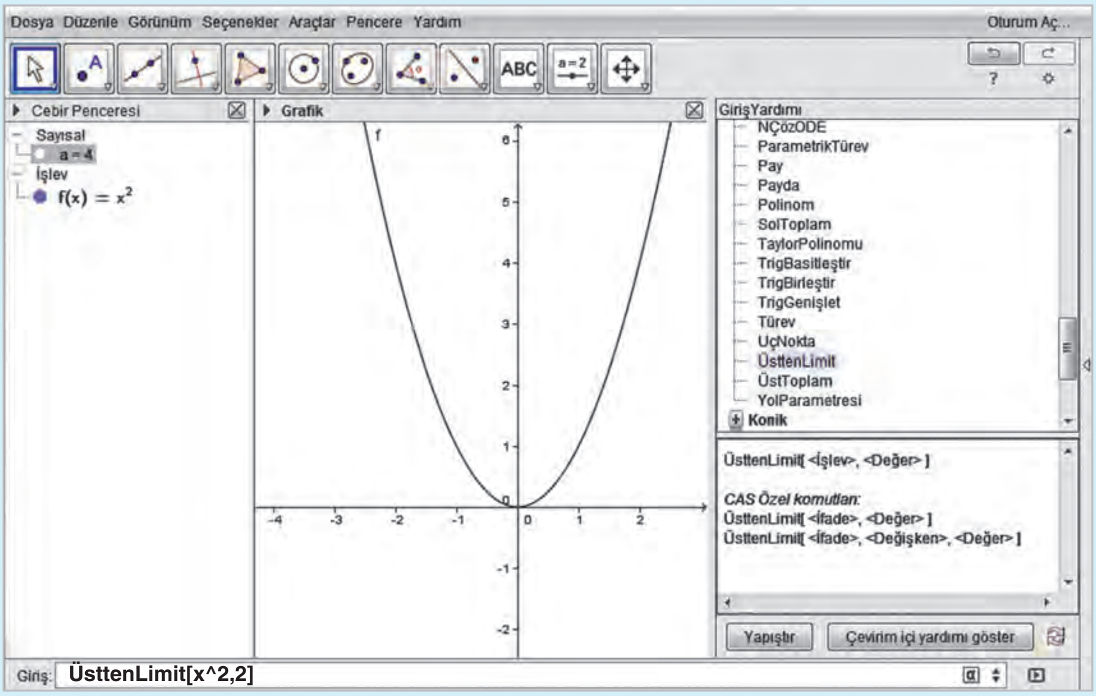
• GeoGebra programını çalıştırarak giriş kısmına x^2 yazarak $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım.



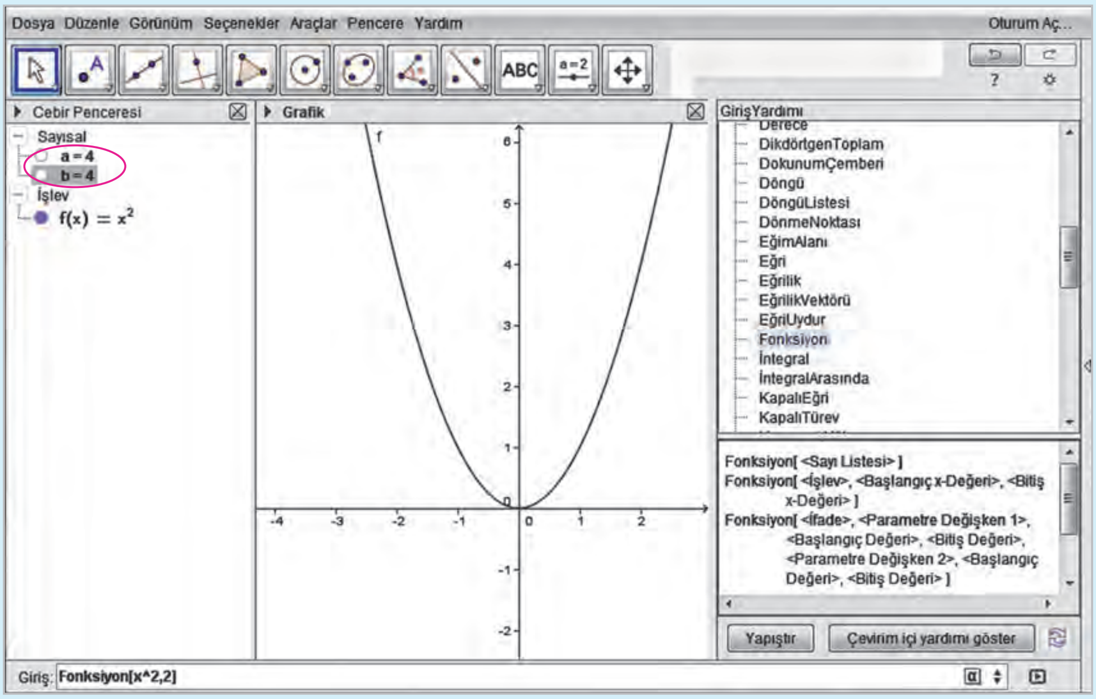
• İşlevler & Analiz menüsünden **AlttanLimit** komutuyla açılan ifadeyi giriş kısmına yapıştıralım. Açılan parantez içerisine **x^2,2** yazalım. Enter tuşuna basalım.



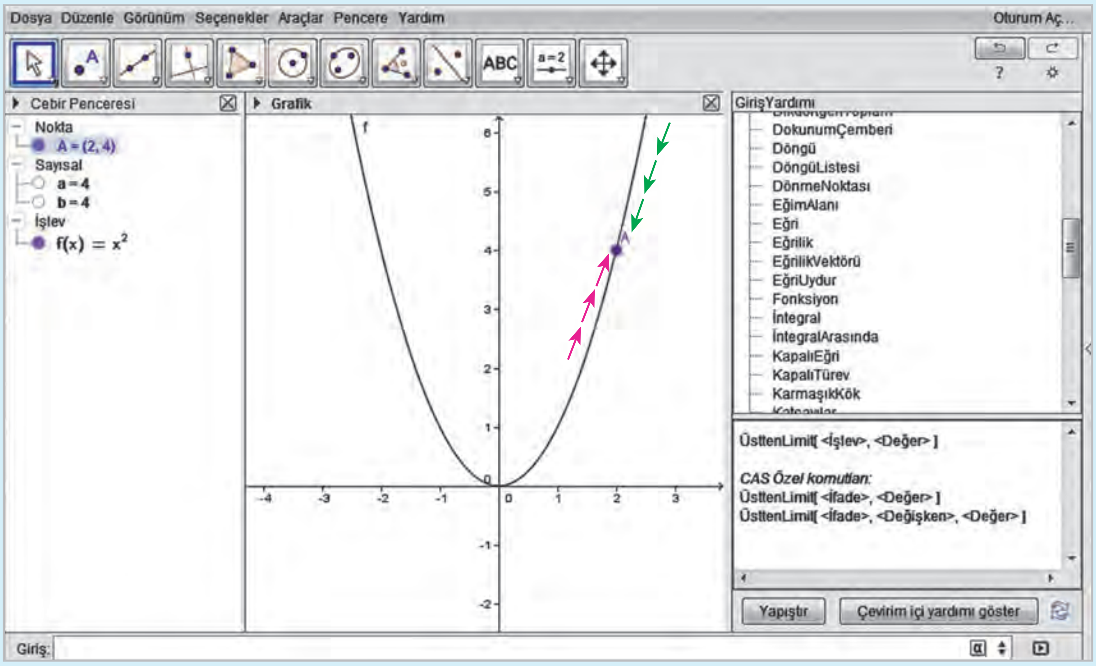
• İşlevler & Analiz menüsünden **ÜsttenLimit** komutunu giriş kısmına yapıştıralım. **x^2,2** yazarak enter tuşuna basalım.



• Tabloda a = 4, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun soldan limitini; b = 4, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun sağdan limitini göstermektedir.



• $f(x) = x^2$ fonksiyonunun x = 2 noktasındaki soldan ve sağdan limiti birbirine eşit olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ olur.



$\lim\limits_{x \to a} x = a$ dır.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm

→ 3 ←

x	2,7	2,8	2,9	2,99	...	...	3,01	3,1	3,2	3,3
$f(x)$	2,7	2,8	2,9	2,99	...	...	3,01	3,1	3,2	3,3

→ 3 ←

$\lim\limits_{x \to 3^-} x = 3$ ve $\lim\limits_{x \to 3^+} x = 3$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$ tür.

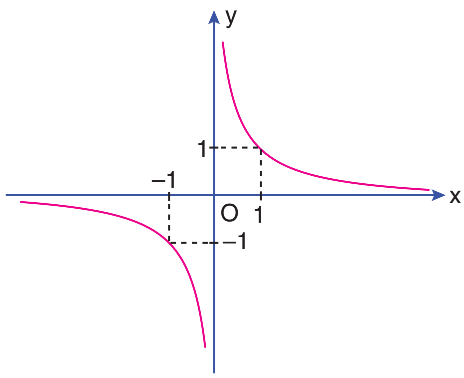
Örnek

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında limitinin olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğine göre x, 0 a soldan yaklaştıkça $f(x) = \frac{1}{x}$ in aldığı değerler $-\infty$ a yaklaşmaktadır.

x, 0 a sağdan yaklaştıkça $f(x) = \frac{1}{x}$ in aldığı değerler ∞ a yaklaşmaktadır.



Buna göre

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ olduğundan $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında limiti yoktur.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm

$x \to 2 \Rightarrow (x-2) \to 0$ dır.

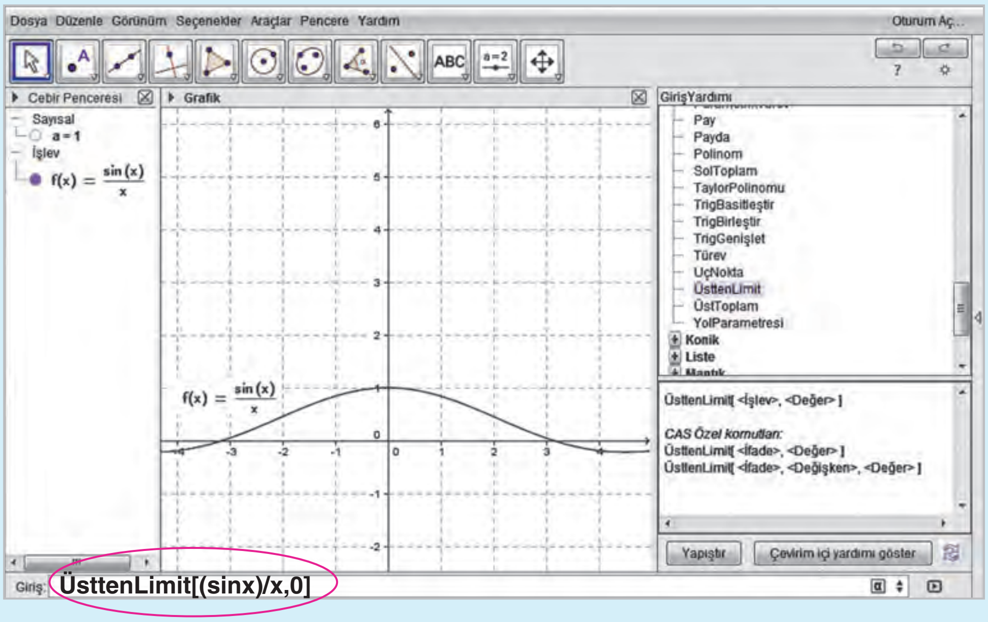
$x - 2 = t$ olsun. Buna göre

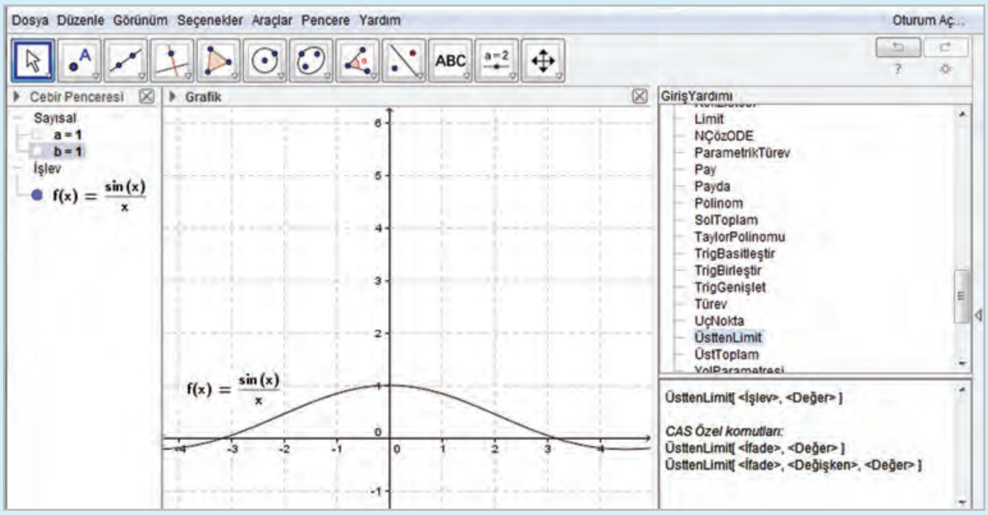
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak gösterelim.

• GeoGebra programında giriş kısmına $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ yazarak grafiği oluşturalım.

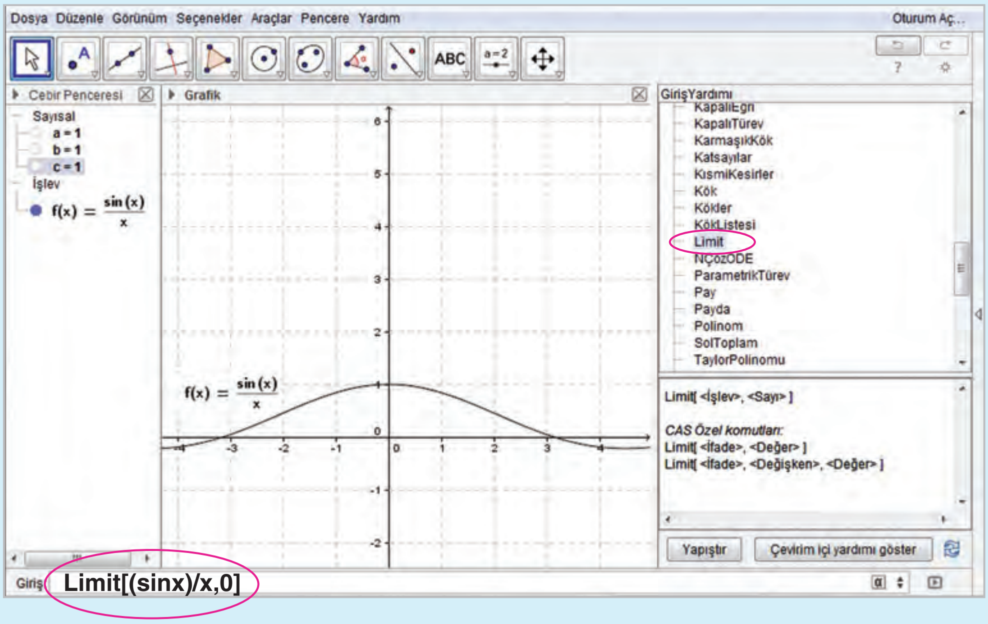
• İşlevler & Analiz menüsünden sırasıyla **AlttanLimit** ve **ÜsttenLimit** komutlarını giriş kısmına yapıştırarak açılan paratez içerisine **(sinx)/x,0** yazalım.





• $a = 1$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun soldan limitini; $b = 1$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun sağdan limitini göstermektedir. $a = b = 1$ yani $x = 0$ noktasındaki soldan ve sağdan limit birbirine eşit olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olur.

• İşlevler & Analiz menüsünden **Limit** komutunu kullanarak $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki limitini hesapladığımızda da $c = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu görürüz.



$a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$ şeklindedir.

Örnek

$a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x - a) \cdot (x + a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} (x + a) = a + a = 2a$ bulunur.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ değerini bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak gösterelim.

• Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanları hesap makinesi yardımıyla dolduralım. x değeri 2 ye soldan ve sağdan yaklaştıkça $f(x)$ değerinin hangi sayıya yaklaştığını açıklayalım.

→ 2 ←

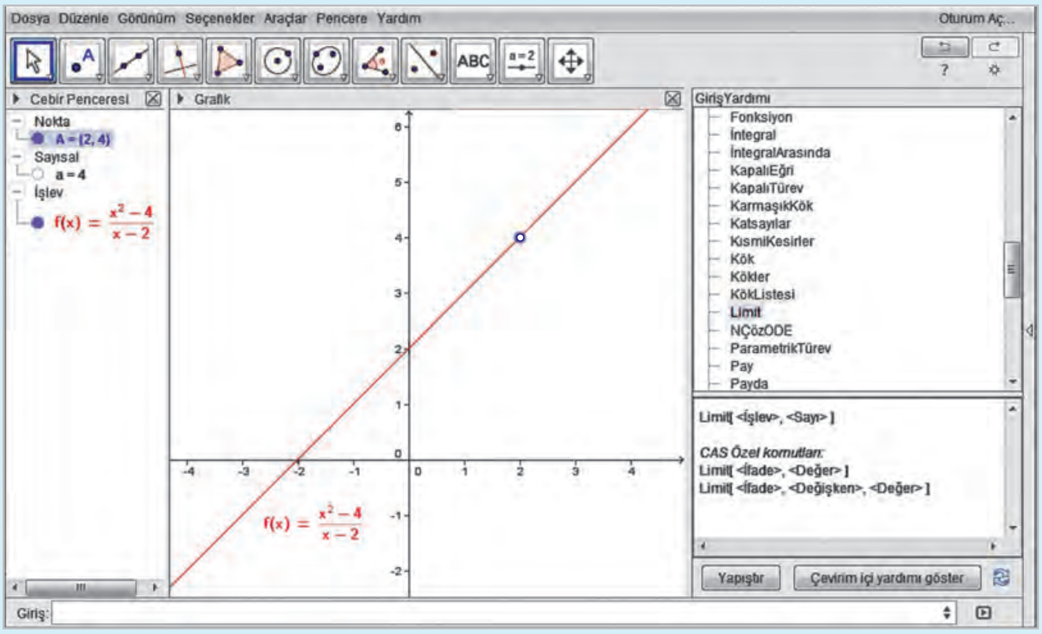
x	1,8	1,85	1,9	1,99	2,01	2,1	2,5	2,7
$f(x)$								

→ ... ←

• GeoGebra programını açarak “Giriş” kısmına (x^2–4)/(x–2) yazarak $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım.

• Tekrar “Giriş” kısmına Limit[(x^2–4)/(x–2),2] yazarak $f(x)$ fonksiyonunu $x \to 2$ için limitini bulalım. (İşlevler & Analiz menüsünden de “Limit” komutu bulunarak aynı formül yazılabilir.) Grafiğin sol sütununda görünen a değeri limiti göstermektedir.

• Grafik üzerinde $x = 2$ ye soldan ve sağdan yaklaştıkça y değerinin 4 e yaklaşıp yaklaşmadığını kontrol edelim.



5.1.2. Limit ile İlgili Özellikler

f ve g, x = a noktasında limitleri olan iki fonksiyon olsun.

1) $\forall c \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ için $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to a} f(x)\right|$

7) n tek doğal sayı ya da n çift doğal sayı ve x in a sayısına yakın tüm değerleri için

$f(x) \geq 0$ ise $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

8) $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

9) $\lim\limits_{x \to a} (\log_b f(x)) = \log_b \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$, $(a \in \mathbb{R}^+)$

10) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ $(a \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \quad \left(a \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$

$\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Cauchy (Koşi), 1789'da Paris'te doğdu. Bugün Cauchy teoremi adıyla bilinen ünlü teoremi ifade ederek ispatladı. 1816'da cebir dersleri vermeye başladı. 1830 devriminden sonra bağlılık andını kabul etmediği için görevinden ayrıldı ve Torino'ya giderek kendisi için açılan matematik kürsüsünde çalışmaya başladı.

Analiz dalının önemli bir parçası olan limit ve süreklilik konularında önemli çalışmaları olmuştur.

1820'lerde Cauchy ilk defa limit ve süreklilik tanımını yaptı.

Kaynak: matematik.dpu.edu.tr



Cauchy
(1789-1857)

Örnek

$\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x)$ değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} x = 2^2 + 2 = 6$ bulunur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ fonksiyonunun $x = -3$ noktasında limitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x+3} = \lim_{x \to -3}(x - 3)$$

$$= \lim_{x \to -3} x - \lim_{x \to -3} 3 = -3 - 3 = -6 \text{ olur.}$$

Dikkat edilirse fonksiyon $x = -3$ noktasında tanımlı olmamasına karşın bu noktada limiti vardır.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 8^2}{x - 8} = 2 \cdot 8 = 16 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 1}(\log_2(5x-1))$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to 1}(\log_2(5x-1)) = \log_2\left(\lim_{x \to 1}(5x-1)\right)$$
$$= \log_2(5 \cdot 1 - 1)$$
$$= \log_2 4$$
$$= \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2$$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \sin 2x$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to 0} \sin 2x = \sin 0 = 0$$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$
$$= 1 \cdot 1$$
$$= 1$$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...a_0$ polinomu için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

Örnek

$f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ olmak üzere

a) $\lim\limits_{x \to 1}(-3x^2 + 2x - 1)$ değerini bulalım.

b) $f(1)$ değerini bulalım.

Çözüm

a) $\lim\limits_{x \to 1}(-3x^2 + 2x - 1) = \lim\limits_{x \to 1}(-3x^2) + \lim\limits_{x \to 1} 2x - \lim\limits_{x \to 1} 1$

$$= -3\lim_{x \to 1} x^2 + 2\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 1 = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = -3 + 2 - 1 = -2$$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = -3 + 2 - 1 = -2$

Örnek

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 1}{x - 4}$ değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 1}{x - 4} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 1)}{\lim\limits_{x \to 3}(x - 4)} = \dfrac{3^2 + 1}{3 - 4} = \dfrac{10}{-1} = -10$ bulunur.

Örnek

$\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{2x^2 + 7}$ değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{2x^2 + 7} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -1}(2x^2 + 7)} = \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 7} = \sqrt{9} = 3$ tür.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 2} 2^{2x^2 - 4}$ değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 2} 2^{2x^2 - 4} = 2^{\lim\limits_{x \to 2}(2x^2 - 4)} = 2^{(2 \cdot 2^2 - 4)} = 2^4 = 16$

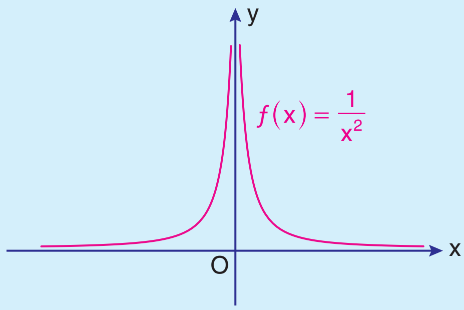
$a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 - 1}{x^2} = a$ dır.

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 - 1}{x^2}$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2}{x^2} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} a - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= a - 0$$
$$= a$$



$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Örnek

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2} = 2$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= 2 - 0$$
$$= 2$$

Limit hesabı sonucunda $\dfrac{0}{0}$ belirsiz durumu ortaya çıkabilir. Bu durumda pay ve payda çarpanlarına ayrılarak belirsizlik durumu giderilir.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x \to 2}(x-2)} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

x^2-4 ifadesini çarpanlarına ayırarak işlemi yapalım.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 2+2 = 4$ olur.

Örnek

$\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$ değerini hesaplayalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \dfrac{y^3-y^3}{y^2-y^2} = \dfrac{0}{0}$ olur.

Pay ve paydayı çarpanlarına ayıralım.

$\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \lim\limits_{x \to y} \dfrac{\cancel{(x-y)}\cdot(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}\cdot(x+y)} = \lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} = \dfrac{y^2+y^2+y^2}{2y} = \dfrac{3y^2}{2y} = \dfrac{3y}{2}$ olur.

UYGULAYALIM

1. $f(x) = \dfrac{x}{2}$ fonksiyonunda x değişkeni 2 sayısına sağdan yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun kaça yaklaştığını bulunuz?

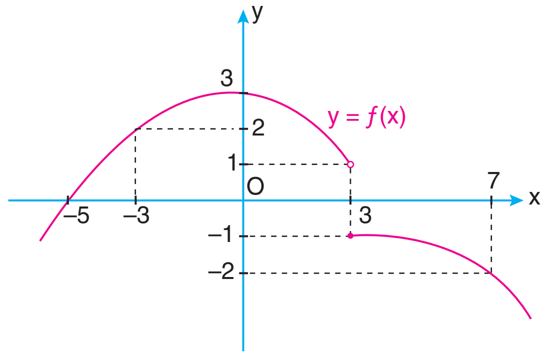
2. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanları hesap makinesi yardımıyla doldurarak $\lim\limits_{x \to 2}(4x-1)$ değerini bulunuz.

→ 2 ←

x	1,5	1,9	1,99	1,999	...	...	2,001	2,01	2,1	2,5
$f(x) = 4x-1$	5				...	...				

$f(x) = ...$

3. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafiğe göre



a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ **ç)** $\lim_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim_{x \to 7} f(x)$

değerlerini bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini bulunuz.

5. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ değerini bulunuz.

6. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$ değerini bulunuz.

7. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanları hesap makinesi yardımıyla doldurarak $\lim_{x \to 4} x^2$ değerini bulunuz.

→ 4 ←

x	3,85	3,9	3,98	3,99	3,999	...	...	4,001	4,01	4,1	4,15	4,2
$f(x) = x^2$	14,8225					...	...					

$f(x) = ...$

8. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\lim_{x \to 2} (4x^2 - 3x + 2)$ **b)** $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$ **c)** $\lim_{x \to 2} [(4x^2 - 1) \cdot (3x^2 + 2)]$

ç) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 16}$ **d)** $\lim_{x \to 4} 2^{2x^2 - 30}$ **e)** $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sin(x - 3)}{x - 3}$

5.1.3. Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Sürekliliği

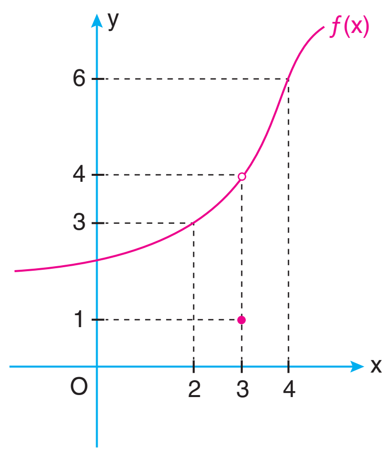
$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki limiti var ve $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında **süreklidir** denir.

Aksi takdirde f fonksiyonu $x = a$ noktasında **süreksizdir** denir.

Örnek

Yanda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun sırası ile $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 4$ noktasındaki sürekliliğini inceleyelim.



Çözüm

$2 \in \mathbb{R}$, $3 \in \mathbb{R}$ ve $4 \in \mathbb{R}$ olduğundan 2, 3 ve 4 tanım kümesinin elemanlarıdır.

- $x = 2$ için $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ tür. Ayrıca

  $f(2) = 3$ olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$ olup $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir.

- $x = 3$ için $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$ olup $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ tür.

  $f(3) = 1$ olduğundan $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$ olur.

  Bu durumda $f(x)$, $x = 3$ noktasında süreksizdir.

- $x = 4$ için $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 6$ olup $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$ dır.

  $f(4) = 6$ olduğundan $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) = 6$ olur. Dolayısıyla $f(x)$, $x = 4$ noktasında süreklidir.

f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olabilmesi için

1) f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti olmalıdır.

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

Fonksiyonun sürekliliği ancak tanımlı olduğu noktalarda araştırılır. Örneğin $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımsız olduğundan bu noktada sürekliliği araştırmak anlamsızdır.

Limit, değeri belli bir sayıya yaklaşırken bir fonksiyonun değerinin yaklaştığı değerdir. Süreklilik, fonksiyonun bu yaklaşım anında kesintiye uğramamasıdır. 1820'lere kadar yeterli bir limit tanımı yapılmamıştı. 1820'de Cauchy (Koşi), limit ve süreklilik tanımını yaptı.

Salih Zeki, önde gelen son dönem Osmanlı matematik bilginlerindendir. Dönemin ünlü bilginleriyle matematik ve fen bilimleri konusunda yazılı tartışmalara girmiştir. Bu konularda bir kısmı ders kitabı olmak üzere çok sayıda eser vermiştir. Salih Zeki'nin en önemli eserleri, matematik alanındaki Asar-ı Bâkiye ve basımı yarım kalmış olan Kamus-ı Riyaziyat'tır. Limit konusunda yayınlanan birçok eseri Türkçe'ye tercüme etmiştir.

Kaynak: Ana Britannica Ansiklopedisi



Salih Zeki
(1864-1921)

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5$ ve $\lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 1) = 5$ olduğundan $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$ tir.

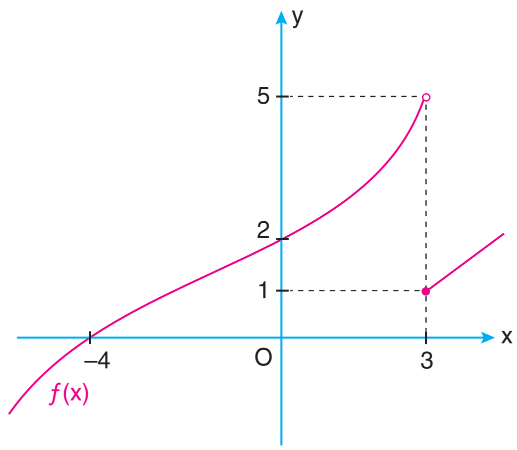
$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = f(2) = 5$ tir.

Buna göre $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir.

Örnek

Yanda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz ve sürekli olduğu noktaları bulalım.



Çözüm

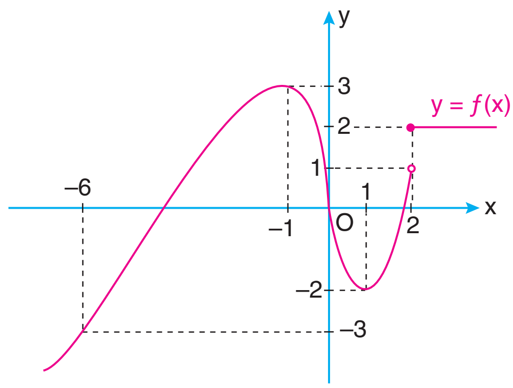
Grafiğe göre $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$ ve $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti yoktur. Dolayısıyla $x = 3$ te süreksizdir.

Grafiğe göre $x = 3$ noktası dışında $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu nokta yoktur. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu $x \in (-\infty,\ 3) \cup (3,\ \infty)$ için süreklidir.

Örnek

Yanda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun sürekli ve süreksiz olduğu noktaları bulalım.



Çözüm

$x = 2$ için $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ ve $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ tir. Dolayısıyla bu noktada $f(x)$ fonksiyonunun limiti yoktur. $x = 2$ te süreksizdir.

Grafiğe göre $x = 2$ noktası dışında $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu nokta yoktur. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ için süreklidir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \geq 1 \text{ ise} \\ 4x, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

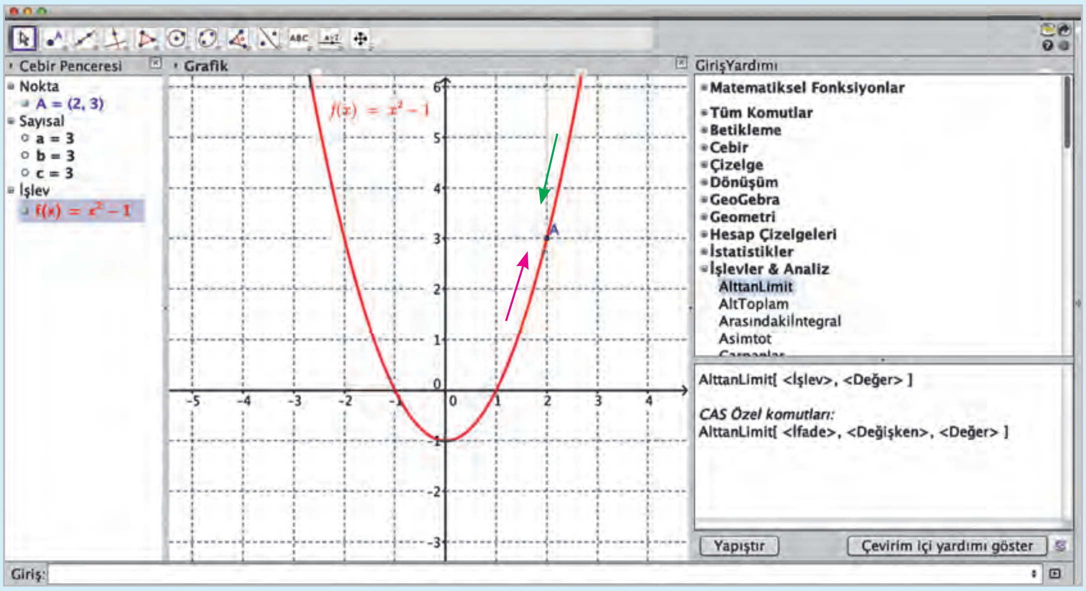
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x^2 = 2$ ve $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 4x = 4$ tür.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun limiti yoktur ve $x = 1$ noktasında süreksizdir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olup olmadığını bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak gösterelim.

• **AlttanLimit** ve **ÜsttenLimit** komutlarından yararlanarak $a = b = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 1) = 3$ sonucuna ulaşabiliriz.

• Giriş menüsüne $f(2)$ yazıp enter tuşuna bastığımızda $c = f(2) = 3$ sonucuna ulaşabiliriz.



• Sonuç olarak $a = b = c$ yani fonksiyonun $x = 2$ noktasındaki limiti var ve $f(2)$ değerine eşit olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir.

• Aşağıdaki tabloyu hesap makinesi yardımıyla dolduralım.



$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

x	1,8	1,9	1,98	1,99	2,01	2,02	2,1	2,2
$f(x) = x^2 - 1$								

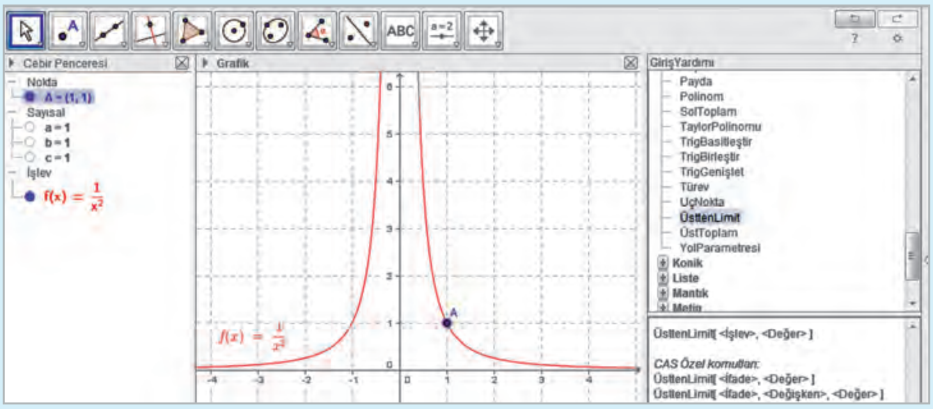
$\longrightarrow f(2) = ... \longleftarrow$

• Tablodan yararlanarak $\lim\limits_{x \to 2^-}(x^2 - 1)$, $\lim\limits_{x \to 2^+}(x^2 - 1)$ ve $f(2)$ değerlerini bulalım.

• Bulduğumuz değerleri karşılaştırarak $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olup olmadığını açıklayınız.

$f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasında sürekli olup olmadığını bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak gösterelim.

• **AlttanLimit** ve **ÜsttenLimit** komutlarını kullanarak $a = b = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2} = 1$ sonucuna ulaşabiliriz.

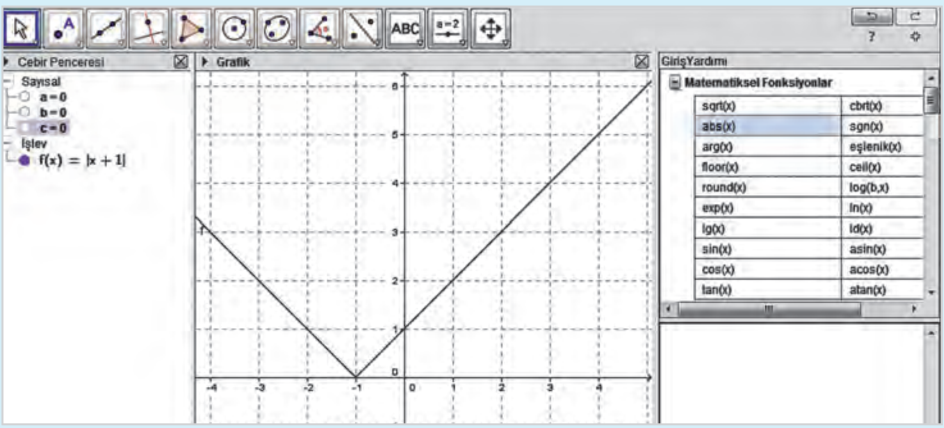


• $c = f(1) = 1$ olduğundan $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=|x+1|$ fonksiyonunun $x=-1$ noktasında sürekli olup olmadığını bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak gösterelim.

• **abs(x)** (mutlak değer fonksiyonu) komutunu kullanarak $f(x)=|x+1|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

• **AlttanLimit** ve **ÜsttenLimit** komutları ile $x=-1$ noktasındaki soldan ve sağdan limitleri hesaplayalım.



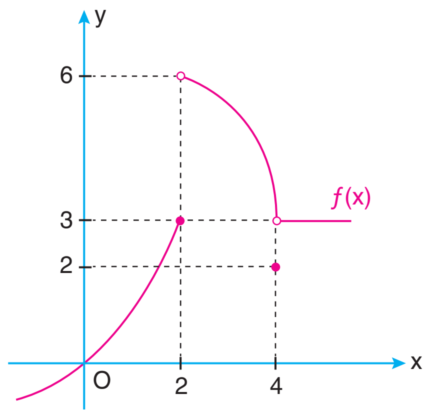
• $a = b = c$ yani $\lim\limits_{x \to -1} |x+1| = 0 = f(-1)$ olduğundan fonksiyon $x=-1$ noktasında süreklidir.

UYGULAYALIM

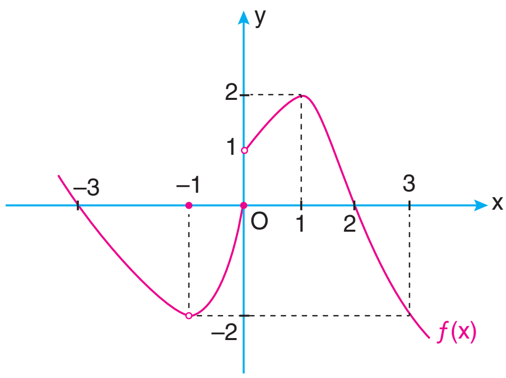
1. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz.

2. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \geq 2 \text{ ise} \\ 3x^2 - 3, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz.

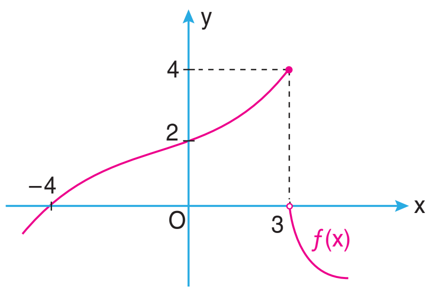
3. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.



4. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun $(-3, 3)$ aralığında süreksiz olduğu noktaları bulunuz.



5. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.



a) ☐ $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki limiti 2 dir.

b) ☐ $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında süreklidir.

c) ☐ $f(x)$ fonksiyonu $[-4, 3)$ aralığındaki her noktada süreklidir.

ç) ☐ $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti yoktur.

d) ☐ $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki soldan limiti 4 tür.

5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

Türev; matematiğin yanında fizik, kimya, mühendislik ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerin hepsinde pek çok problemin çözümünü kolaylaştıran, bu nedenle de büyük önem taşıyan bir konudur. Örneğin bir ürünün maliyet fonksiyonunu biliyorsak hangi üretim miktarında maliyetin en düşük düzeyde olacağını veya herhangi bir üretim miktarında maliyetin değişim oranının yani maliyetin hangi hızla artacağını veya azalacağını türev yardımıyla bulabilmekteyiz. Benzer şekilde bir malın kâr fonksiyonunu bildiğimizde hangi satış miktarında kârın en yüksek olacağını, kârın hangi hızla artacağını veya azalacağını yine türev yardımıyla bulabiliriz.

Bu tür problemlerde birbirine bağlı iki değişken vardır ve bu değişkenlerden birinde yapılan değişiklik nedeniyle diğerinde de değişme söz konusu olur. Burada değişme miktarından daha çok, değişmenin oranı önem taşımaktadır. Örneğin günümüzde altın fiyatı zamanla değişmektedir. Altın fiyatının bir ayda 1 TL artması ile bir yılda 1 TL artması arasında çok büyük fark vardır. Bu nedenle önemli olan, değişimin hangi miktarda olduğu değil, hangi oranda olduğudur.



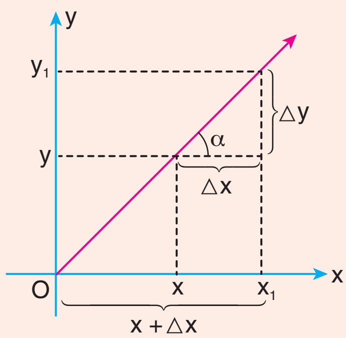
5.2.1. Türev Kavramı

$y = f(x)$ fonksiyonunun değişim miktarını $\triangle y$, x in değişim miktarını $\triangle x$ ile gösterelim. Şekilde

$\triangle x = x_1 - x$ ve $\triangle y = y_1 - y$ olmak üzere

$m = \tan\alpha = \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ oranına **değişim oranı** denir.

Diğer taraftan $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$ olduğundan değişim oranı $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ tir.



Örnek

Bir hareketlinin t saatte aldığı yol (km), $s(t)=40t+t^2$ fonksiyonu ile veriliyor. Bu hareketlinin 5. saatteki anlık hızını bulalım.

Çözüm

Hareketlinin $[t_1,\ t_2]$ zaman aralığındaki ortalama hızı,

$V_{ort}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ formülü ile hesaplanır. Örneğin hareketlinin $[3,5]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort}=\frac{s(5)-s(3)}{5-3}=\frac{(40\cdot 5+5^2)-(40\cdot 3+3^2)}{2}=48 \text{ km/sa.}$$

$[5,7]$ aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort}=\frac{s(7)-s(5)}{7-5}=\frac{(40\cdot 7+7^2)-(40\cdot 5+5^2)}{2}=52 \text{ km/sa. olur.}$$

Benzer şekilde $[4,5]$, $[(4,5),5]$, $[(4,8),5]$, $[5,(5,2)]$, $[5,(5,5)]$, $[5,6]$, $[5,7]$ aralığındaki ortalama hızları sırası ile 49, $(49,5)$, $(49,8)$, $(50,2)$, $(50,5)$, 51, 52 olup aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

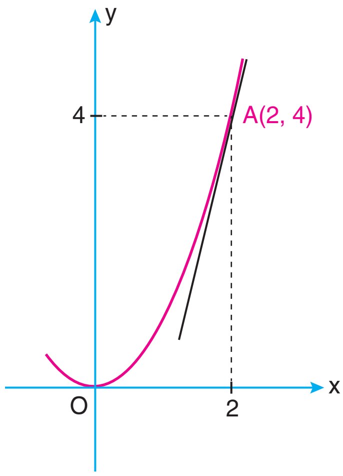
$[t_1,t_2]$	$[3,5]$	$[4,5]$	$[(4,5),5]$	$[(4,8),5]$	...	...	$[5,(5,2)]$	$[5,(5,5)]$	$[5,6]$	$[5,7]$
Vort (km/sa)	48	49	49,5	49,8	...	...	50,2	50,5	51	52

Hareketli 5. saatte radara girmiş olsun. O andaki hızı yani 5. saatteki hızı, $h\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $h\to 0$ için $[5,5+h]$ veya $[5-h,5]$ aralığındaki ortalama hızdan yararlanırsak

$$\begin{aligned}
\text{Anlık hız} &= \lim_{h\to 0}\frac{s(5+h)-s(5)}{(5+h)-5}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[40\cdot(5+h)+(5+h)^2-(40\cdot 5+5^2)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(200+40h+25+10h+h^2-200-25)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+50h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(h+50)\\
&= 50 \text{ km/sa. olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek

$y = x^2$ parabolünün grafiğine $A(2, 4)$ noktasında çizilen teğetin eğimini değişim oranından yararlanarak bulalım.



Çözüm

Düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktasından geçen doğrunun eğimi,

$m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ile hesaplanır.

Örneğin; $y = x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın $B_1\left((1,9), (1,9)^2\right)$ ve $B_2\left((2,1), (2,1)^2\right)$ noktaları için

$$m_{AB_1} = \frac{\text{y deki değişim miktarı}}{\text{x deki değişim miktarı}} = \frac{2^2 - (1,9)^2}{2 - 1,9} = 3,9$$

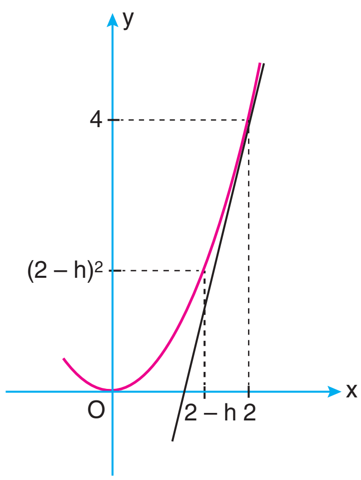
$$m_{AB_2} = \frac{\text{y deki değişim miktarı}}{\text{x deki değişim miktarı}} = \frac{(2,1)^2 - 2^2}{2,1 - 2} = 4,1 \text{ bulunur.}$$

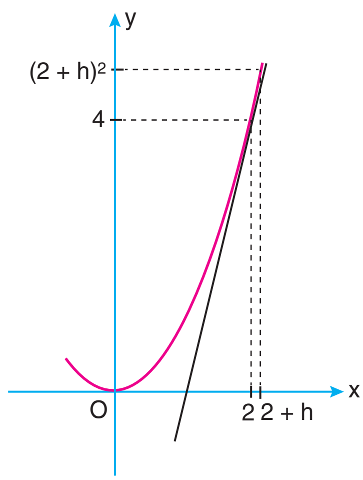
Benzer şekilde $\left((1,99),\ (1,99)^2\right)$, $\left((1,999), (1,999)^2\right)$, $\left((2,001),\ (2,001)^2\right)$, $\left((2,01)\ (2,01)^2\right)$, $\left((2,1),\ (2,1)^2\right)$ noktaları için aynı işlemlerle aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

B	$((1,9),(1,9)^2)$	$((1,99),(1,99)^2)$	$((1,999),(1,999)^2)$	$((2,001),(2,001)^2)$	$((2,01),(2,01)^2)$	$((2,1),(2,1)^2)$
m_{AB}	3,9	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1

$y = x^2$ parabolünün grafiğine $A(2, 4)$ noktasında çizilen teğetin eğimini, $h \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $h \to 0$ için $A(2,4)$ ve $B\left(2 + h,\ (2 + h)^2\right)$ noktasından geçen doğrunun eğiminden yararlanarak bulalım.

$$\lim_{h \to 0} m_{AB} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h) - 2} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 \text{ olur.}$$





Bu durumda $y = x^2$ parabolüne $A(2,4)$ noktasında çizilen teğetin eğimi 4 tür.

Örnek

Bir hareketlinin x km yol gidebilmek için toplam yakıt gideri $P(x)=5+2x+0,1x^2$ (TL) ifadesi ile veriliyor.

a) Gidilen yol 100 km den 200 km ye yükseldiğinde giderdeki değişimi,

b) Gidilen yolun bu değişimi için giderdeki ortalama değişim oranını,

c) 200 km yol alındığı anda giderdeki anlık değişim oranını bulalım.

Çözüm

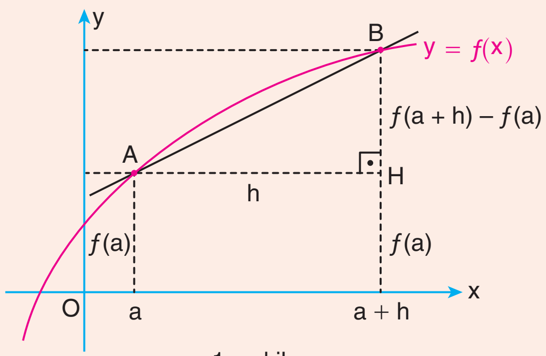
a) $P(200)-P(100)=5+2\cdot200+0,1\cdot200^2-(5+2\cdot100+0,1\cdot100^2)=4405-1205=3200$ TL

b) Ortalama değişim oranı $=\dfrac{P(200)-P(100)}{200-100}=\dfrac{3200}{100}=32$

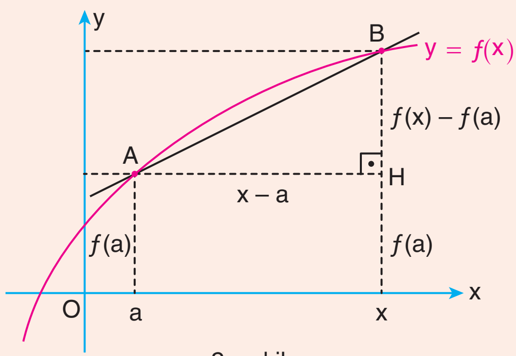
c) Anlık değişim oranı $=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{P(200+h)-P(200)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{5+2\cdot(200+h)+0,1\cdot(200+h)^2-(5+2\cdot200+0,1\cdot200^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{42h+0,1\cdot h^2}{h}=\lim_{h\to0}(42+0,1h)=42 \text{ olur.}$$



1. şekil



2. şekil

Şekilde $\dfrac{|BH|}{|AH|}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ise değişim oranı $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ dir.

AB doğrusunun eğimi, $m=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ olur (1. şekil) veya $\dfrac{|BH|}{|AH|}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ise değişim oranı $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ olup AB doğrusunun eğimi $m=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dır. (2. şekil)

$\dfrac{|BH|}{|AH|}=m=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ oranı $y=f(x)$ fonksiyonunun, x in a dan a + h ye kadar olan değişiminin ortalamasını verir.

h daha küçük seçilerek sıfıra yaklaştırıldığında B noktası A ya yaklaşır.

$h \to 0$ için limit durumunda B noktası A ile çakışır ve AB doğrusu A noktasında $y = f(x)$ eğrisine teğet konuma gelir.

$h \to 0$ durumunda $m = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ veya $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ oranı **anlık değişim oranını** verir. $(x = a + h)$

Bir fonksiyonun anlık değişim oranına **türev** denir. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi aynı noktadaki teğetinin eğimine eşittir.

$f:[a,b]\to\mathbb{R},\ y = f(x)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ değeri varsa bu değere $y = f(x)$ fonksiyonunun **x_0 noktasındaki türevi** denir.

$f'(x_0)$ veya $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

$x = x_0 + h$ alınırsa $x \to x_0$ için $h \to 0$ dır.

Bu nedenle $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi,

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ şeklinde de tanımlanabilir.

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu $x_0 \in A$ da sürekli olsun.

1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limitinin bir reel sayı değeri varsa bu değere $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki **sağdan türevi** denir. $f'(x_0^+)$ şeklinde gösterilir.

2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limitinin bir reel sayı değeri varsa bu değere $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki **soldan türevi** denir. $f'(x_0^-)$ şeklinde gösterilir.

Bir fonksiyonun x_0 noktasında sağdan ve soldan türevleri var ve birbirine eşitse fonksiyonun x_0 noktasında türevi vardır denir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun $x_0 = 4$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm

1. Yol

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to 4} \frac{(2x+1)-(2\cdot 4+1)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{2\cdot(x-4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} 2 = 2$$

2. Yol

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2\cdot(4+h)+1)-(2\cdot 4+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Örnek

$f(x)=c,\ (c\in\mathbb{R})$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Sabit fonksiyonun türevi 0 dır.

$r\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=x^r$ fonksiyonunun türevi, $f'(x)=r\cdot x^{r-1}$ dir.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$f(x)=x^5\Rightarrow f'(x)=5\cdot x^{5-1}\Rightarrow f'(x)=5\cdot x^4$ tür.

Örnek

$f(x)=x^{\frac{1}{5}}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$$f(x)=x^{\frac{1}{5}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{\frac{4}{5}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}$$

f' fonksiyonu f fonksiyonunun türevlenebildiği bir x_0 noktasında türevlenebiliyorsa f'' fonksiyonuna f fonksiyonunun **ikinci mertebeden türevi** denir. $f''(x)$ veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ ile gösterilir.

Örnek

$y = x^4$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesini bulalım.

Çözüm

$y = f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$

Michelle Rolle (Mişel Rol), cebir alanında çalışan Fransız matematikçidir. Kendi adıyla anılan Rolle teoremi ile bilinmektedir. 1690 yılında "Cebir Kitabı" adlı eserini yayınladı.

Kaynak: Ana Britannica Ansiklopedisi



Rolle
(1652-1719)

UYGULAYALIM

1. Bir hareketlinin t saatte aldığı yol (km), $s(t) = 50t + t^2$ fonksiyonu ile veriliyor. Hareketlinin $[4, 6]$ zaman aralığındaki ortalama hızını ve 6. saatteki anlık hızını bulunuz.

2. $y = x^3$ parabolüne $A(1, 1)$ noktasında çizilen teğetinin eğimini bulunuz.

3. $y = x^2$ parabolüne $B(3, 9)$ noktasında çizilen teğetinin eğimini bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini, türev tanımından yararlanarak bulunuz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^{10}$ **b)** $g(x) = x^{95}$ **c)** $h(x) = x^{-4}$ **ç)** $t(x) = x^{\frac{1}{4}}$

5.2.2. Bir Fonksiyonun Bir Noktada ve Bir Aralıkta Türevlenebilirliği

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\in(a,b)$ için f fonksiyonunun türevi varsa f fonksiyonu $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ **aralığında türevlidir** denir. $x_0\in(a,b)$ olmak üzere f fonksiyonunun x_0 noktasında türevi varsa f fonksiyonu $\mathbf{x_0}$ **noktasında türevlidir**.

Örnek

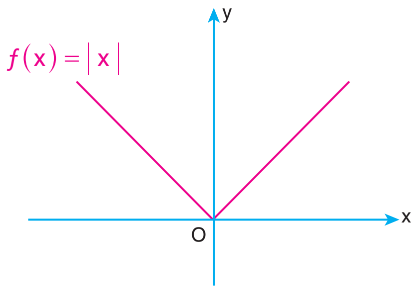
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktasında türevli olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



$f'(0^+)\neq f'(0^-)$ olduğundan $f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktasında türevi yoktur.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1 \text{ ise}\\ x^2-1, & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasında türevli olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1-0}{x-1}=1$$

$f'(1^+)\neq f'(1^-)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasında türevi yoktur.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x>2 \text{ ise}\\ x-2, & x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$ fonksiyonunun $x_0=2$ noktasında türevli olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-(2-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=2+2=4$$

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2-(2-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$f'(2^+)\neq f'(2^-)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x_0=2$ noktasında türevi yoktur.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x$ fonksiyonunun $x_0=2$ noktasında türevli olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-(2^2-2\cdot 2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}x=2$$

olduğundan f fonksiyonu $x_0=2$ noktasında türevlidir.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x$ fonksiyonunun tanım kümesi üzerinde türevli bir fonksiyon olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

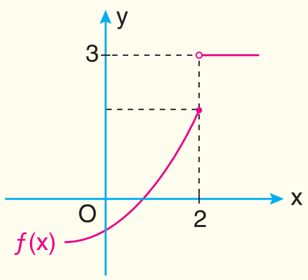
$f(x)=x^2-4x$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{x^2-4x-(a^2-4a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2-(4x-4a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot(x+a)-4\cdot(x-a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot(x+a-4)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}(x+a-4)\\
&= 2a-4 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

$\forall a\in\mathbb{R}$ için $(2a-4)\in\mathbb{R}$ olduğundan f fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında türevlidir.

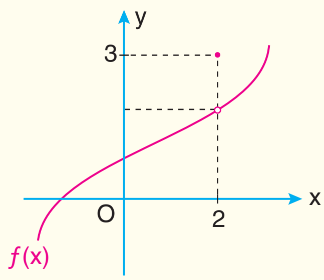
1) Bir f fonksiyonunun $x=a$ noktasında türevinin olması için f nin $x=a$ noktasında sürekli ve $x=a$ noktasında soldan ve sağdan türevinin birbirine eşit olması gerekir.

2) Bir f fonksiyonu $x=a$ noktasında türevli ise bu noktada süreklidir. f fonksiyonu $x=a$ noktasında sürekli değil ise bu noktada türevli değildir. Örneğin;



$x=2$ de $f(x)$ süreksiz ve

$x=2$ de türevi yoktur.

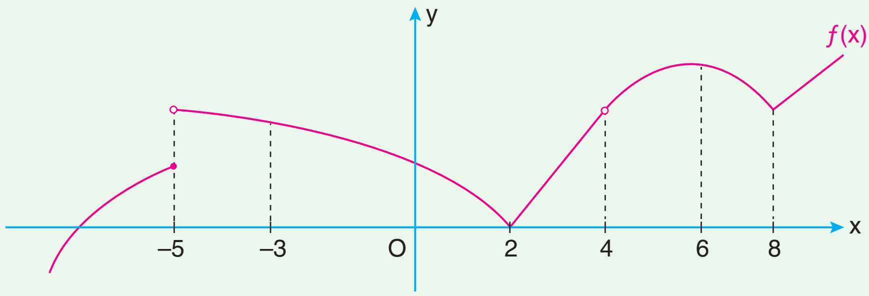


$x=2$ de $f(x)$ süreksiz ve

$x=2$ de türevi yoktur.

Fonksiyon sürekli olmasına rağmen türevli olmayabilir.

Fonksiyonun türevli olmadığı noktalar kırılma noktalarıdır ya da bu noktalarda grafik parçalıdır.

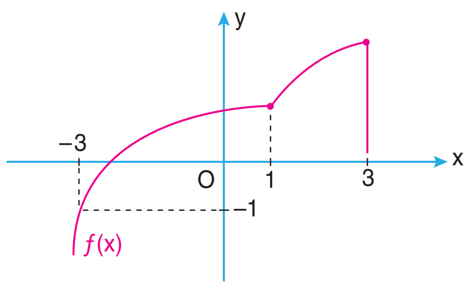


Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun belirtilen noktaları için aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. (✓: Belirtilen şartı sağlıyor, X: belirtilen şartı sağlamıyor.)

x	Sürekli	Türevli
-5		
-3		
2		
0		
6		
8	✓	X

Örnek

Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun $(-3,1)$, $(1,3)$ ve $(0,3)$ aralıklarındaki türevlenebilirliğini inceleyelim.



Çözüm

$f(x)$ fonksiyonu, $(-3,1)$ ndaki her noktada türevli olduğu için $(-3,1)$ nda türevlidir.

$f(x)$ fonksiyonu, $(1,3)$ ndaki her noktada türevli olduğundan $(1,3)$ nda türevlidir.

$f(x)$ fonksiyonunun, $(0,3)$ na ait $x=1$ noktasında türevi olmadığından $(0,3)$ nda türevli değildir.

5.2.3. İki Fonksiyonun Toplamının, Farkının, Çarpımının ve Bölümünün Türevi

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere

$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$ ve $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$ tir.

$$[f(x) \mp g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) \mp g(x+h)]-[f(x) \mp g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)] \mp [g(x+h)-g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \mp \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) \mp g'(x)$$

Örnek

$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)'$$
$$= (x^4)' + (x^3)' + (x^2)' + (x)' + (1)'$$
$$= 4\cdot x^{4-1} + 3\cdot x^{3-1} + 2\cdot x^{2-1} + 1\cdot x^{1-1} + 0$$
$$= 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \text{ dir.}$$

Örnek

$f(x) = x^5 - x^3 + x$ olduğuna göre $f'(1)$ değerini bulalım.

Çözüm

$f(x) = x^5 - x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 5\cdot x^{5-1} - 3\cdot x^{3-1} + 1x^{1-1} = 5x^4 - 3x^2 + 1$

$f'(1) = 5\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2 + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ tür.

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$F(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ tir.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h}$$

Bu ifadenin payından $f(x) \cdot g(x+h)$ ifadesini çıkarıp ekleyelim.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + [g(x+h) - g(x)] \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Örnek

$f(x) = (x^3 - 1) \cdot (x^2 + 2)$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

1. Yol

$g(x) = x^3 - 1$ ve $h(x) = x^2 + 2$ olsun.

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ olur. Buna göre

$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$= (x^3 - 1)' \cdot (x^2 + 2) + (x^3 - 1) \cdot (x^2 + 2)'$

$= 3x^2 \cdot (x^2 + 2) + (x^3 - 1) \cdot 2x$

$= 3x^4 + 6x^2 + 2x^4 - 2x = 5x^4 + 6x^2 - 2x$ olur.

2. Yol

$f(x) = (x^3 - 1) \cdot (x^2 + 2) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2$

$f'(x) = (x^5)' + (2x^3)' - (x^2)' - (2)'$

$= (x^5)' + 2' \cdot x^3 + 2 \cdot (x^3)' - (x^2)' - (2)'$

$= 5x^4 + 0 \cdot x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 2x - 0$

$= 5x^4 + 6x^2 - 2x$

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[c \cdot f(x)]' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$ tir.

Örnek

$f(x) = 5x^6 \cdot (x^3 - 1)$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$f(x) = 5x^6 \cdot (x^3 - 1)$ ise

$$f'(x) = (5x^6)' \cdot (x^3 - 1) + 5x^6 \cdot (x^3 - 1)'$$

$$= 5 \cdot 6x^5 \cdot (x^3 - 1) + 5x^6 \cdot 3x^2$$

$$= 30x^5 \cdot (x^3 - 1) + 15 \cdot x^8 = 30x^8 - 30x^5 + 15x^8 = 45x^8 - 30x^5$$ bulunur.

Örnek

$f(x) = (x^5 - x^4 + 2x) \cdot (4x^2 - 2)$ fonksiyonunun $x = -1$ deki türevini bulalım.

Çözüm

$$f(x) = (x^5 - x^4 + 2x) \cdot (4x^2 - 2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^5 - x^4 + 2x)' \cdot (4x^2 - 2) + (x^5 - x^4 + 2x) \cdot (4x^2 - 2)'$$

$$= (5x^4 - 4x^3 + 2) \cdot (4x^2 - 2) + (x^5 - x^4 + 2x) \cdot (8x)$$

$$f'(-1) = \left(5 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 2\right) \cdot \left(4 \cdot (-1)^2 - 2\right) + \left((-1)^5 - (-1)^4 + 2(-1)\right) \cdot 8 \cdot (-1)$$

$$= (5 + 4 + 2) \cdot (4 - 2) + (-1 - 1 - 2) \cdot (-8) = 11 \cdot 2 - 4 \cdot (-8) = 22 + 32 = 54$$ olur.

- $f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olsun.

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$ olur.

- $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}$

Bu ifadenin payından $f(x)\cdot g(x)$ ifadesini çıkarıp ekleyelim.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x).h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)+f(x)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x).h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)-f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)\right)$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$ olur.

Örnek

$f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$g(x)=x^3-2,\ h(x)=x^2+1$ ise $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ tir.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{(x^3-2)'\cdot(x^2+1)-(x^3-2)\cdot(x^2+1)'}{[x^2+1]^2}$$

$$=\frac{(3x^2)\cdot(x^2+1)-(x^3-2)\cdot 2x}{x^4+2x^2+1}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+4x}{x^4+2x^2+1}=\frac{x^4+3x^2+4x}{x^4+2x^2+1}$$ bulunur.

Örnek

$f(x)=\dfrac{x^5-2x^3+1}{x^2}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$g(x)=x^5-2x^3+1,\ h(x)=x^2$ ise $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ tir.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \text{ ise } f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{(x^5-2x^3+1)'\cdot x^2-(x^5-2x^3+1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{(5x^4-6x^2)\cdot x^2-(x^5-2x^3+1)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{5x^6-6x^4-2x^6+4x^4-2x}{x^4}$$

$$=\frac{3x^6-2x^4-2x}{x^4}$$

$$=\frac{x\cdot(3x^5-2x^3-2)}{x^4}$$

$$=\frac{3x^5-2x^3-2}{x^3} \text{ bulunur.}$$

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanlardaki işlemleri yaparak tabloyu doldurunuz.

$f(x)$	$g(x)$	$[f(x)+g(x)]'$	$[f(x)\cdot g(x)]'$	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$
x^2	x^3			
$-3x^2-1$	x^4-1			
$\dfrac{1}{x}$	x^4			

Doğru boyunca hareket eden bir cismin t zamanda aldığı yolu veren fonksiyon $s(t)$ olsun. Cismin $[t_0,\ t]$ zaman aralığında aldığı yol, $s(t)-s(t_0)$ olduğundan ortalama hızı; $V_{ort}=\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ dır.

Buna göre cismin t_0 anında hızı,

$$V=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=s'(t_0) \text{ olur.}$$

Ayrıca bir cismin hızının birim zamandaki değişme miktarı ivmeyi verir. Cismin t_0 anındaki hızı $V(t_0)$, t anındaki hızı $V(t)$ ise cismin ortalama ivmesi, $a_{ort}=\dfrac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}$ dır.

O hâlde cismin t_0 anındaki hız ivmesi,

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}=V'(t_0) \text{ olur.}$$

Buna göre doğru boyunca hareket eden bir cismin t zamanda aldığı yol $s(t)$ ise bu cismin,

t anındaki hızı; $V(t)=s'(t)$

t anındaki ivmesi; $a(t)=V'(t)$ dir.

Örnek

Doğru boyunca hareket eden bir cismin t saniyede aldığı yol (metre), $s(t)=t^2+5t$ fonksiyonu ile veriliyor. Cismin $t=5$ saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulalım.

Çözüm

$s(t)=t^2+5t \Rightarrow V(t)=s'(t)=2t+5$ olduğundan

$V(5)=2\cdot5+5$

$=15$ m/sn. olur.

Cismin 5 saniye sonundaki ivmesi,

$a(t)=V'(t)\Rightarrow(2t+5)'=2$ m/sn.^{2} olur.

Örnek

Bir cismin t saniyede aldığı yol (metre),

$s(t) = 2t^4 - 18t^3 + 36t^2$ fonksiyonu ile veriliyor. Buna göre

a) Cismin 1. saniyede aldığı yolu,

b) Cismin 1. saniyedeki hızını,

c) Cismin 1. saniyedeki ivmesini bulalım.

Çözüm

a) Cismin 1 saniyede aldığı yol $s(1)$ olduğundan

$s(t) = 2t^4 - 18t^3 + 36t^2 \Rightarrow s(1) = 2 \cdot 1^4 - 18 \cdot 1^3 + 36 \cdot 1^2 = 20$ metredir.

b) $V(t) = s'(t) = 8t^3 - 54t^2 + 72t \Rightarrow V(1) = 8 \cdot 1^3 - 54 \cdot 1^2 + 72 \cdot 1 = 8 - 54 + 72 = 26$ m/sn. olur.

c) $V(t) = 8t^3 - 54t^2 + 72t \Rightarrow a(t) = V'(t) = 24t^2 - 108t + 72$

$\Rightarrow a(1) = 24 \cdot 1^2 - 108 \cdot 1 + 72 = -12$ m/sn.^{2} dir.

Örnek

Bir cismin t saniyede aldığı yol (metre) $s(t) = 24t - 2t^2$ fonksiyonu ile veriliyor. Buna göre bu cismin $t = 4$ saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulalım.

Çözüm

$s(t) = 24t - 2t^2 \Rightarrow V(t) = s'(t) = 24 - 4t$

Cismin $t = 4$ saniye sonundaki hızı, $V(4) = 24 - 4 \cdot 4 = 24 - 16 = 8$ m/sn.

Cismin $t = 4$ saniye sonundaki ivmesi, $a(t) = V'(t) = (24 - 4t)' = -4$ m/sn.^{2} olur.

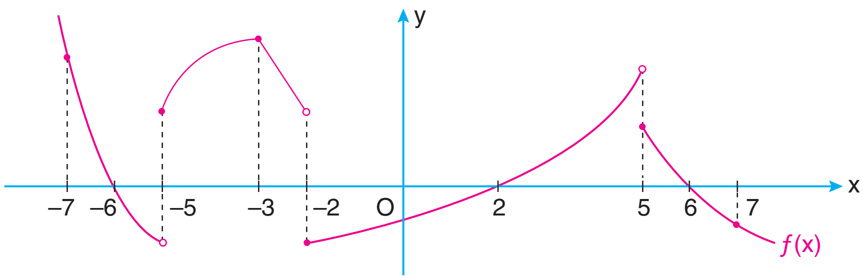
Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz. Bu sayfadaki arama motorunu kullanarak türevle ilgili konu anlatım videolarına ulaşabilirsiniz.

UYGULAYALIM

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun tanım kümesinde türevli olup olmadığını gösteriniz.

2. $f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasında türevli olup olmadığını gösteriniz.

3.



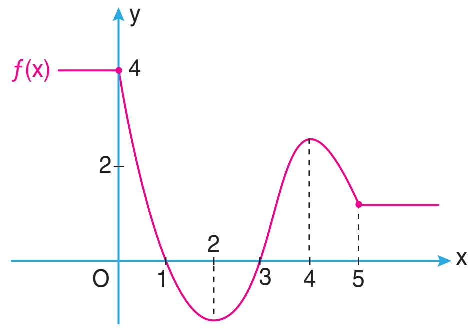
Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun belirtilen noktaları ve aralıkları için aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. (✓: Belirtilen şartı sağlıyor, X: belirtilen şartı sağlamıyor.)

x	Sürekli	Türevli
-7		
-5		X
-3	✓	
-2		
7		
$(-7, -5)$		
$(-2, 5)$		

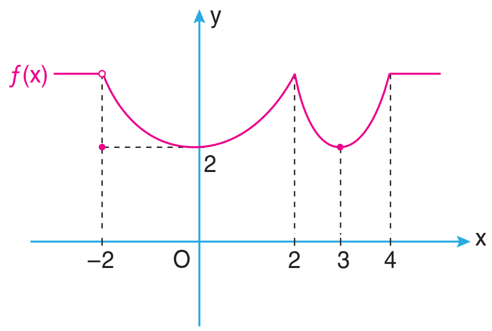
4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 2 \text{ ise} \\ 5, & x = 2 \text{ ise} \\ -x + 7, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında türevi olup olmadığını gösteriniz.

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5$ fonksiyonunun tanım kümesinde türevli olup olmadığını gösteriniz.

6. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olmasına rağmen türevlenebilir olmadığı noktaları bulunuz.



7. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.



a) ☐ $x = -2$ noktasında süreklidir.

b) ☐ $x = 4$ noktasında süreklidir.

c) ☐ $x = 4$ noktasında türevlenebilirdir.

ç) ☐ $x = 2$ noktasında sürekli fakat türevli değildir.

d) ☐ $x = 0$ noktasında türevlidir.

e) ☐ $(-2, 2)$ nda türevlidir.

f) ☐ $(0, 3)$ nda türevlidir.

8. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x - 1$

b) $g(x) = x^6 \cdot (4x^2 - 8x)$

c) $h(x) = (x^4 - 5x^2) \cdot (9x^3 - 8x)$

ç) $t(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^4}$

9. $f(x) = 5x^3 - 9x^2$ ve $g(x) = x^{10}$ olduğuna göre aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) - g(x)$ **c)** $f(x) \cdot g(x)$ **ç)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

10. $f(x) = 4x - \dfrac{3}{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

11. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.

12. $f(x) = 5x - 2\sqrt{x}$ ise $f'(4)$ değerini bulunuz.

13. $f(x) = \dfrac{5x}{1 - x^2}$ ise $f'(0)$ değerini bulunuz.

14. $f(x) = mx^2 - 2x + 6$ ve $f'(1) = 0$ ise m değerini bulunuz.

15. Bir cismin t saniyede aldığı yol (metre), $s(t) = 3t^3 - 16t^2 + 90t + 10$ fonksiyonu ile veriliyor.

Buna göre cismin;

a) 2. saniyedeki hızını,

b) 2. saniyedeki ivmesini bulunuz.

16. 150 metre yüksekten bırakılan bir cismin t saniyede aldığı yol (metre), $s(t) = 3{,}6\,t^2$ fonksiyonu ile veriliyor.

a) Cismin 3. saniyedeki hızını,

b) Cismin 3. saniyedeki ivmesini bulunuz.

17. Bir cismin t saniyede aldığı yol (metre), $s(t) = 48t - 4t^2$ fonksiyonu ile veriliyor.

a) Cismin 5. saniye sonundaki hızını,

b) Cismin 5. saniye sonundaki ivmesi,

c) Cismin 5. saniye sonunda almış olduğu yolu bulunuz.

5.2.4. İki Fonksiyonun Bileşkesinin Türevi

* f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere
  $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ tir.

* $y = (gof)(x) = g(f(x))$ ifadesinde $f(x) = u \Rightarrow y = g(u)$ olur.

  $u = f(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{du}{dx}$ ve $y = g(u) \Rightarrow g'(u) = \dfrac{dy}{du}$ olur.

  $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = g'(u) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ elde edilir.

Yukarıdaki **kurala zincir kuralı** adı verilir.

Örnek

$f(x) = 3x^5 + 1$ ve $g(x) = x^3$ ise $y = (gof)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$y = (gof)(x) \Rightarrow y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= g'(3x^5 + 1) \cdot 15x^4$

$= 3 \cdot (3x^5 + 1)^2 \cdot 15x^4$

$= 45 \cdot (3x^5 + 1)^2 \cdot x^4$ olur.

$f(x) = 3x^5 + 1 \Rightarrow f'(x) = 15x^4$

$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$

Örnek

$f(x) = (x^3 + 1)^5$ olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$g(x) = x^5$, $h(x) = x^3 + 1$ olarak alınırsa

$f(x) = (goh)(x)$ yazılabilir.

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$= g'(x^3 + 1) \cdot (x^3 + 1)' = 5 \cdot (x^3 + 1)^4 \cdot 3x^2 = 15.(x^3 + 1)^4 \cdot x^2$ elde edilir.

$g(x) = x^5 \Rightarrow g'(x) = 5x^4$

$h(x) = x^3 + 1 \Rightarrow h'(x) = 3x^2$

Örnek

$y = 4t^3 + 1,\quad t = 3x + 2$ olduğuna göre $\dfrac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = 4 \cdot 3 \cdot t^2 \cdot 3 = 36(3x + 2)^2$ bulunur.

$\dfrac{dy}{dt} = 4 \cdot 3t^2,\quad \dfrac{dt}{dx} = 3$

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$ tir.

Örnek

$f(x) = (3x^4 + x^3)^5$ fonksiyonunun $x = -1$ deki türevini bulalım.

Çözüm

$$f(x) = (3x^4 + x^3)^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot (3x^4 + x^3)^4 \cdot (3x^4 + x^3)' = 5 \cdot (3x^4 + x^3)^4 \cdot (12x^3 + 3x^2)$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 5 \cdot \left(3 \cdot (-1)^4 + (-1)^3\right)^4 \cdot \left(12 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2\right)$$

$$= 5 \cdot 2^4 \cdot (-9) = -720 \text{ olur.}$$

Örnek

$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} = (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} \text{ ise}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{2}{3} - 1} \cdot (x^2 + 1)'$$

$$= \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$g'(7)=-4$ ve $f(x)=g(3x+4)$ olduğuna göre $f'(1)$ değerini bulalım.

Çözüm

$f(x)=g(3x+4) \Rightarrow f'(x)=g'(3x+4)\cdot(3x+4)'=3\cdot g'(3x+4)$

$x=1 \Rightarrow f'(1)=3\cdot g'(3\cdot 1+4)=3\cdot g'(7)=3\cdot(-4)=-12$ elde edilir.

UYGULAYALIM

1. $f(x)=(5x-2)^{10}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x)=\sqrt{x^3+2}$

b) $g(x)=\sqrt[3]{(2x+3)^2}$

c) $h(x)=\sqrt[5]{(x^4+1)^2}$

ç) $t(x)=\sqrt[7]{(x^2+1)^3}$

3. $g'(2)=8$ ve $f(x)=g(x^2+x)$ ise $f'(1)$ değerini bulunuz.

4. $f(x)=x^3+1$ ve $g(x)=3x+2$ olduğuna göre $(fog)'(1)$ değerini bulunuz.

5. $y=5t^3+1,\ t=4u+2,\ u=x^2-1$ olduğuna göre $\dfrac{dy}{dx}$ i bulunuz.

6. $f(x)=x^2+g(4x-3)$ ve $g'(5)=3$ olduğuna göre $f'(2)$ değerini bulunuz.

7. $f(x)=x^2-x+1$ ve $g(x)=x^3+4x^2$ olduğuna göre

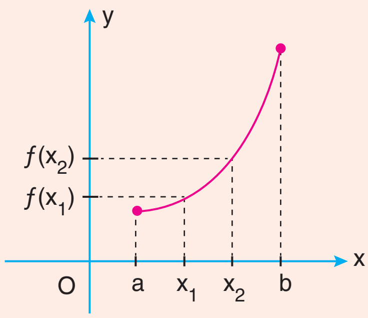
a) $(fog)'(x)$ **b)** $(gof)'(x)$

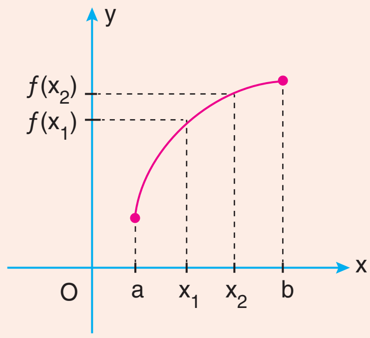
türevlerini bulunuz.

5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

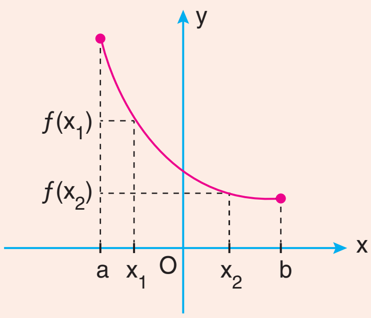
5.3.1. Bir Fonksiyonun Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar

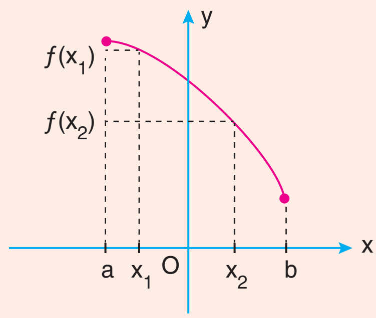
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ nda artandır.



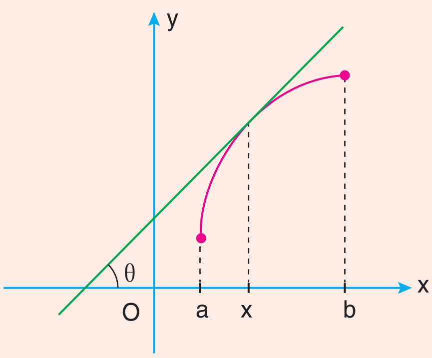


$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ nda azalandır.

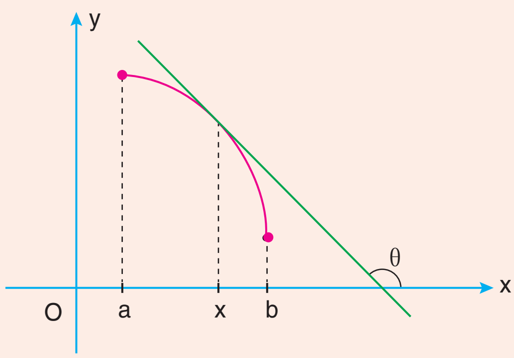




f fonksiyonu $[a,b]$ nda artan ise bu aralığın her noktasında teğetinin eğimi pozitif (θ dar açı), azalan ise teğetinin eğimi negatiftir (θ geniş açı).

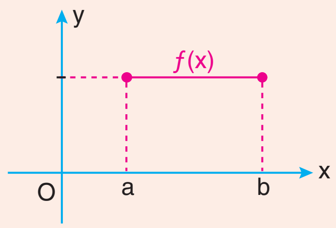


(θ dar açı olduğundan $m = \tan\theta$ pozitiftir.)



(θ geniş açı olduğundan $m = \tan\theta$ negatiftir.)

$f:[a,b] \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ sabit fonksiyon ise $m = \tan\theta = 0$ dır.



$f:[a,b] \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) nda türevlenebilir olsun. $\forall x \in (a,b)$ için

1) $f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ artan fonksiyondur.

2) $f'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ azalan fonksiyondur.

3) $f'(x) = 0 \Rightarrow y = f(x)$ sabit fonksiyondur.

Örnek

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun artan olduğunu gösterelim.

Çözüm

$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$ olduğundan $f(x) = 2x + 1$ artandır.

Örnek

$f(x) = x^2 - 4x + 2$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

Çözüm

Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulmak için birinci türevinin işaret tablosunu oluşturalım.

$f(x) = x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$-\infty$	2	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘ Azalan		↗ Artan

$(-\infty, 2)$ nda $f'(x) < 0$ olduğundan f fonksiyonu $(-\infty, 2]$ nda azalandır.

$(2, \infty)$ nda $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu $[2, \infty)$ nda artandır.

Örnek

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2$ fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulalım.

Çözüm

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3x-6$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3x-6=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-1$

	$-\infty$	-1		2	∞
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗ Artan		↘ Azalan		↗ Artan

$(-1,2)$ nda $f'(x)<0$ olduğundan f fonksiyonunun azalan olduğu aralık $[-1,2]$ dır.

Örnek

$f(x)=2x^3+x^2-(a+1)x+3$ fonksiyonunun gerçek sayılarda daima artan olması için a nın alabileceği değer aralığını bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun gerçek sayılarda artan olması için $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x)>0$ olmalıdır.

$f(x)=2x^3+x^2-(a+1)x+3 \Rightarrow f'(x)=6x^2+2x-(a+1)$

$f'(x)>0$ olması için $\triangle \leqslant 0$ olmalıdır.

$\triangle=2^2-4\cdot6\cdot[-(a+1)] \leqslant 0 \Rightarrow 4+24a+24 \leqslant 0$

$\Rightarrow 24a+28 \leqslant 0$

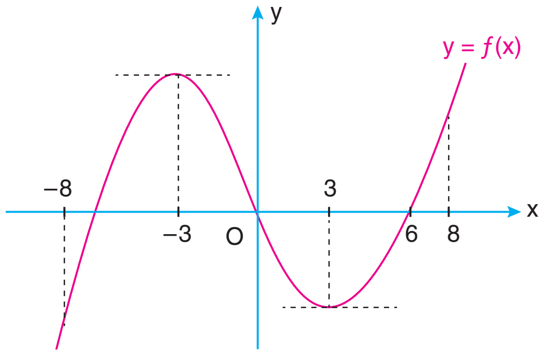
$\Rightarrow a \leqslant -\frac{7}{6}$ olmalıdır.

Dolayısıyla $a \in \left(-\infty, \frac{-7}{6}\right]$ olur.

Başkatsayısı pozitif olan bir fonksiyonun daima pozitif olması için fonksiyonun kökü olmamalıdır. Aksi takdirde fonksiyon negatif değerler de alabilecektir. Dolayısıyla pozitif başkatsayılı bir fonksiyonun daima pozitif olabilmesi için $\triangle \leqslant 0$ olmalıdır.

Örnek

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[-8, 8]$ ndaki grafiği şekildeki gibidir. Buna göre $f'(x) > 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulalım.



Çözüm

$[-8, -3]$ nda f fonksiyonu artan olduğundan $[-8, -3)$ nda $f'(x) > 0$ dır.

$[-3, 3]$ nda f fonksiyonu azalan olduğundan $(-3, 3)$ nda $f'(x) < 0$ dır.

$[3, 8]$ nda f fonksiyonu artan olduğundan $(3, 8]$ nda $f'(x) > 0$ dır. Buna göre

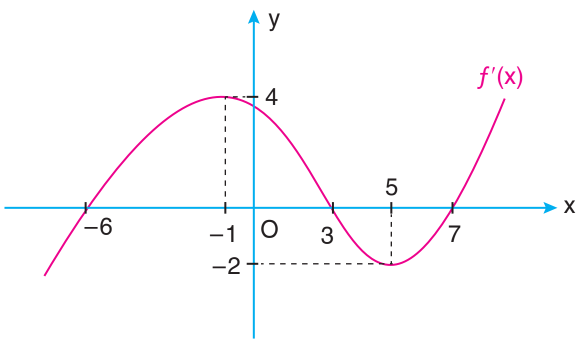
$f'(x) > 0$ şartına uyan tam sayılar,

$-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8$ olduğundan bu sayıların toplamı 0 dır.

Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonuna ait türevin grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun azalan ve artan olduğu aralıkları bulalım.



Çözüm

Grafiğin işaret tablosunu inceleyelim.

x	$-\infty$	-6		3		7		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘ Azalan		↗ Artan		↘ Azalan		↗ Artan	

f fonksiyonu $x \in (-\infty, -6] \cup [3, 7]$ için azalan, $x \in [-6, 3] \cup [7, \infty)$ için artandır.

UYGULAYALIM

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

2. $f(x) = x^3 - 27x$ fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.

3. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri gerçek sayılar kümesinde daima artandır?

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = 2x + 1$

ç) $f(x) = -2x + 1$

d) $f(x) = x^2$

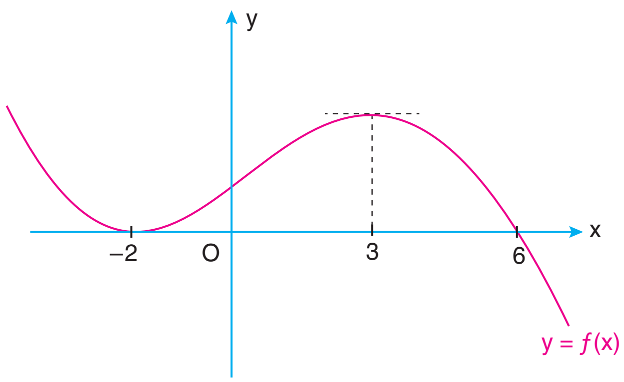
e) $f(x) = -x^3$

f) $f(x) = -x^5 + 1$

g) $f(x) = (x+1)^2$

4. $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ fonksiyonunun artan olduğu aralığı bulunuz.

5.

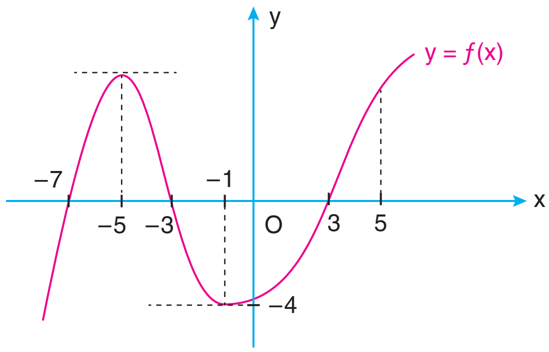


Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f'(x) > 0$ şartını sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

6. $f(x) = mx^3 + 3x^2 - x + 10$ fonksiyonunun gerçek sayılar kümesinde daima azalan olması için m hangi aralıkta değer almalıdır?

7. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 4$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları türevinin işaretini inceleyerek bulunuz.

8. Şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları, birinci türevinin işaretine göre bulunuz.



9. Şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden hangisi veya hangileri daima doğrudur?

a) $f'(-2) > 0$

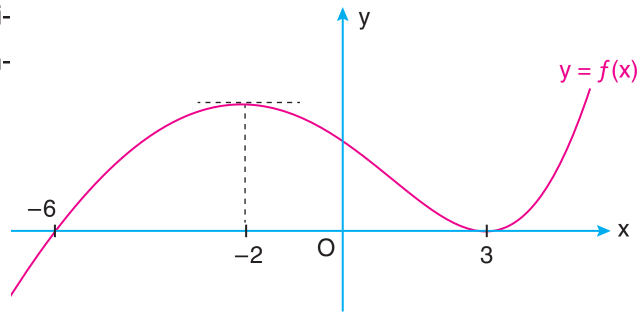
b) $f'(4) < 0$

c) $f'(-7) < 0$

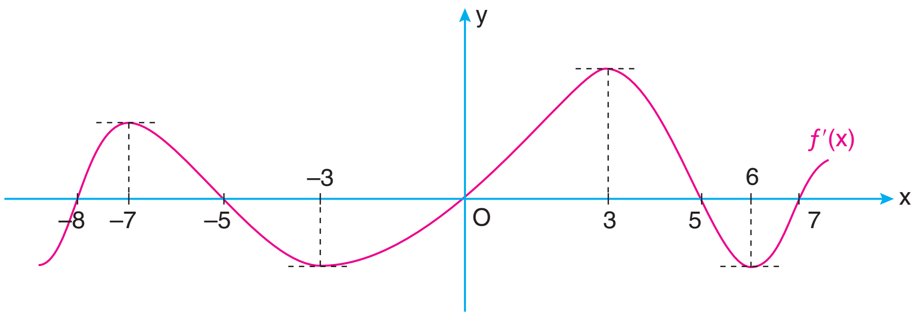
ç) $f'(-6) < 0$

d) $f'(0) < 0$

e) $f'(3) = 0$



10.



Yukarıda $f'(x)$ türev fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

a) ☐ $[-8,-5]$ nda $f(x)$ artandır.

b) ☐ $[-7,-5]$ nda $f(x)$ azalandır.

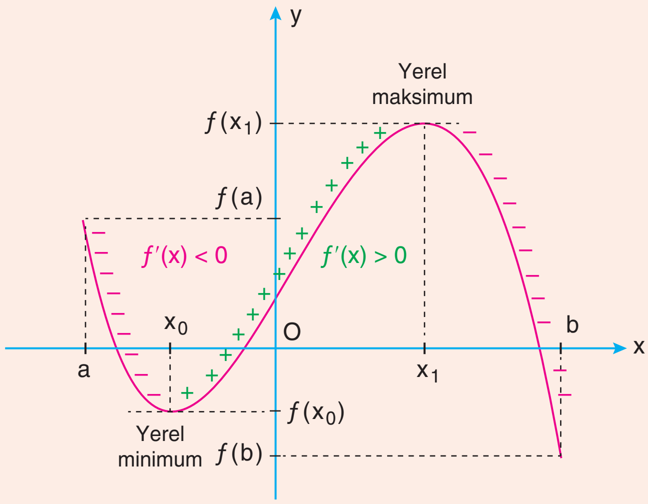
c) ☐ $[-3,3]$ nda $f(x)$ artandır.

ç) ☐ $[5,7]$ nda $f(x)$ azalandır.

d) ☐ $[0,5]$ nda $f(x)$ artandır.

5.3.2. Bir Fonksiyonun Ekstremum Noktaları

$f:[a,b] \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.



$x_0 \in (a,b)$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x_0) \le f(x)$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında **yerel minimuma** sahiptir denir. Diğer bir ifadeyle $x_0 \in (a,b)$ ve $h > 0$ için f fonksiyonu $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ nda en küçük değerini x_0 noktasında alıyorsa $(x_0, f(x_0))$ yerel minimum noktasıdır.

x	$-\infty$	a		x_0		x_1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		$f(a)$	↘	$f(x_0)$	↗	$f(x_1)$	
				Yerel minimum			

Eğer $x_1 \in (a,b)$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x_1) \ge f(x)$ ise f fonksiyonu x_1 noktasında **yerel maksimuma** sahiptir denir. Diğer bir ifadeyle $x_1 \in (a,b)$ ve $h > 0$ için f fonksiyonu $(x_1 - h, x_1 + h)$ nda en büyük değerini alıyorsa $(x_1, f(x_1))$ yerel maksimum noktasıdır.

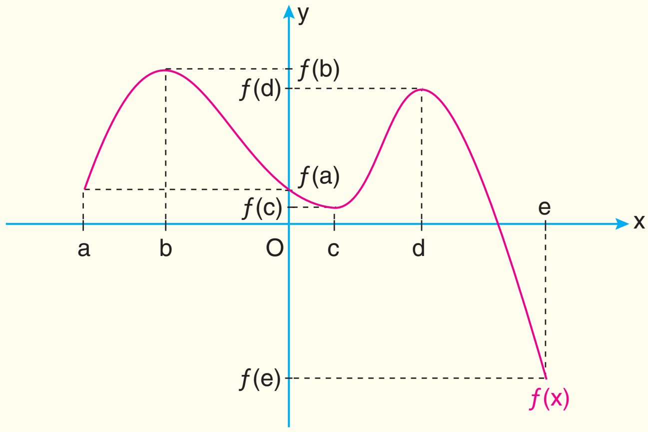
x	$-\infty$	x_0		x_1		b	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$		$f(x_0)$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(b)$	
				Yerel maksimum			

f fonksiyonunun $(x_0 - h, x_0 + h)$ nda en küçük ya da en büyük değerini alması demek, x_0 ın civarında yani çok yakınında $f(x_0)$ dan daha küçük ya da daha büyük değer almaması anlamına gelmektedir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun yerel minimumlarından en küçüğüne **mutlak minimum noktası,** yerel maksimumlarından en büyüğüne ise **mutlak maksimum noktası** denir.

Minimum ve maksimum noktalarına fonksiyonun **ekstremum noktaları** denir.

Bir fonksiyonun tanım kümesinde yerel maksimum ve yerel minimum noktalar birden fazla olabilir.

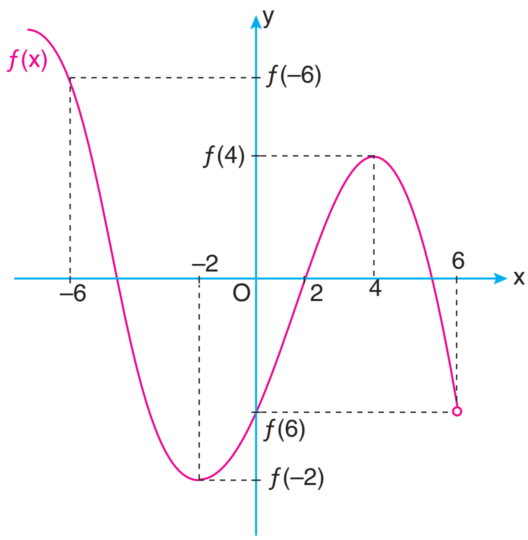


Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, e]$ ndaki grafiği verilmiştir. Grafiğe göre $x = b$ ve $x = d$ noktalarında fonksiyonun yerel maksimumu, $x = a$, $x = c$ ve $x = e$ noktalarında ise yerel minimumu vardır. Ayrıca $x = b$ noktasında mutlak maksimumu ve $x = e$ noktasında mutlak minimumu vardır.

$f(b)$ ve $f(d)$ değerleri fonksiyonun yerel maksimum değerleri, $f(a)$, $f(c)$ ve $f(e)$ değerleri ise fonksiyonun yerel minimum değerleridir.

Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarının apsislerini bulalım.

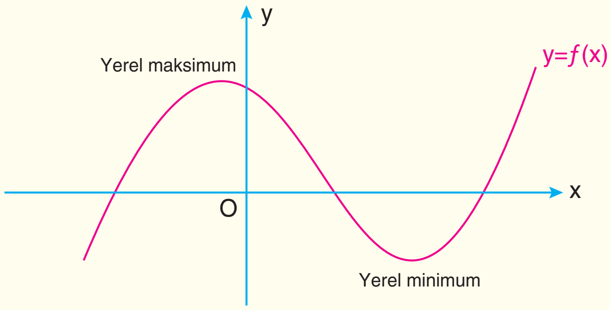


Çözüm

Grafiğe göre $x = -6$ ve $x = 4$ apsisli noktalarında yerel maksimum, $x = -2$ apsisli noktada yerel minimum vardır. $x = -6$ apsisli nokta mutlak maksimum ve $x = -2$ apsisli nokta ise mutlak minimumdur. Fonksiyon $x = 6$ için tanımlı olmadığından bu noktada yerel minimum yoktur.

Dikkat edilirse fonksiyonun azalan olduğu aralıktan, artan olduğu aralığa geçtiği nokta yerel minimumdur. Artan olduğu aralıktan azalan olduğu aralığa geçtiği nokta ise yerel maksimumdur. Bu noktalarda fonksiyonun türevi işaret değiştirmektedir.

Türevli bir fonksiyonun bir noktada yerel ekstremuma sahip olması için o noktada fonksiyonun türevinin işaret değiştirmesi gerekmektedir. Bu noktalarda fonksiyonun türevi ya sıfırdır ya da yoktur.



Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+3x^2-2$ fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm

$f(x)=x^3+3x^2-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x$

$3x^2+6x=0 \Rightarrow 3x\cdot(x+2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2$

$f(x)$ fonksiyonunun türevi $x_1=0$ ve $x_2=-2$ de işaret değiştirdiğinden

$x_1=0$ ve $x_2=-2$ de yerel ekstremuma sahiptir.

$x_1=0 \Rightarrow f(0)=0^3+3.0^2-2=-2$

$x_2=-2 \Rightarrow f(-2)=(-2)^3+3.(-2)^2-2=-8+12-2$

$=2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	2 (Yerel maksimum)	↘	−2 (Yerel minimum)	↗	

Fonksiyonda $(-2,2)$ noktası yerel maksimum, $(0,-2)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-12x+6$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremumlarını bulalım.

Çözüm

$f(x)=x^3-12x+6 \Rightarrow f'(x)=3x^2-12$

$3x^2-12=0 \Rightarrow 3\cdot(x^2-4)=0$

$3.(x-2)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-2$ olur.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	22 (Yerel maksimum)	↘	−10 (Yerel minimum)	↗	

$f'(x),\ x_1=2$ ve $x_2=-2$ de işaret değiştirdiğinden $f(x)$,

$x_1=2$ ve $x_2=-2$ de yerel ekstremuma sahiptir.

$f(2)=2^3-12\cdot2+6=-10$

$f(-2)=(-2)^3-12\cdot(-2)+6=-8+24+6=22$

Fonksiyon $(-2,22)$ noktasında yerel maksimuma,

$(2,-10)$ noktasında yerel minimuma sahiptir.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)^3+1$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremumlarını bulalım.

Çözüm

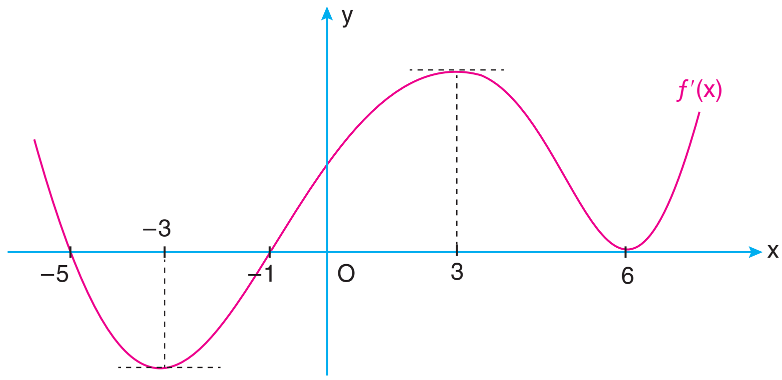
$f(x)=(x-2)^3+1 \Rightarrow f'(x)=3.(x-2)^2$

$3.(x-2)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=2$

Tablodan görüldüğü gibi fonksiyonun türevi işaret değiştirmemektedir. Buna göre fonksiyonun ekstremum noktaları yoktur.

	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗		↗	

Örnek



$y = f(x)$ fonksiyonuna ait türevin grafiği şekildeki gibidir. Buna göre f fonksiyonunun ekstremumlarını bulalım.

Çözüm

Grafiğe göre fonksiyonun türevine ait işaret tablosu yandaki gibidir.

Tabloda görüldüğü gibi fonksiyonun $x = -5$ apsisli noktada yerel maksimumu $x = -1$ apsisli noktada yerel minimumu vardır.

x	$-\infty$		-5		-1		6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	
			$f(-5)$ Yerel maksimum		$f(-1)$ Yerel minimum		$f(6)$		

Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + (n-2)x + 6$ fonksiyonunun $x = -2$ apsisli noktada bir yerel maksimumu varsa n nin alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

Fonksiyonun $x = -2$ apsisli noktada yerel maksimumu varsa $f'(-2) = 0$ dır. (Fonksiyonun türevi $x = -2$ de işaret değiştirmektedir.)

$$f(x) = x^3 + (n-2)x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + n - 2$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 3\cdot(-2)^2 + n - 2 = 0$$

$$12 + n - 2 = 0$$

$$n = -10 \text{ olur.}$$

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^4+4x^3+6$ fonksiyonunun mutlak minimumunu bulalım.

Çözüm

$f(x)=3x^4+4x^3+6 \Rightarrow f'(x)=12x^3+12x^2$

$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3+12x^2=0 \Rightarrow 12x^2\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x_1=x_2=0,\ x_3=-1$ dir.

$f(-1)=3\cdot(-1)^4+4\cdot(-1)^3+6=3-4+6=5$

Fonksiyonun $(-1,5)$ noktasında yerel minimumu vardır. Bu noktadan başka yerel minimum olmadığından en küçük yerel minimum yani mutlak minimum noktası da $(-1,5)$ tir.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	5 (Yerel minimum)	↗		↗	

f fonksiyonu (a,b) nda türevli olsun. $c\in(a,b)$ için $f'(c)=0$, $f''(c)$ var ve $f''(c)\neq 0$ olsun.

1) $f''(c)>0$ ise $(c,\ f(c))$ noktası bir yerel minimumdur.

2) $f''(c)<0$ ise $(c, f(c))$ noktası bir yerel maksimumdur.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulalım.

Çözüm

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9 \Rightarrow f''(x)=6x-6$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x-9=0 \Rightarrow 3\cdot(x^2-2x-3)=0 \Rightarrow 3\cdot(x-3)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-1$

$f''(3)=6\cdot3-6=12>0$ olduğundan $x=3$ te yerel minimum vardır.

$f(3)=3^3-3\cdot3^2-9\cdot3+2=27-27-27+2=-25$ olduğundan $(3,-25)$ yerel minimum noktasıdır.

$f''(-1)=6\cdot(-1)-6=-12<0$ olduğundan $x=-1$ de yerel maksimum vardır.

$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)+2=-1-3+9+2=7$ olduğundan $(-1,7)$ yerel maksimum noktasıdır.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulalım.

Çözüm

$f(x)=x^3-6x^2-15x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-12x-15$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x-15=0$

$x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-1$ dir.

$f'(x)=3x^2-12x-15 \Rightarrow f''(x)=6x-12$

$x_1=5 \Rightarrow f''(5)=6\cdot5-12=18>0$ olduğundan $x_1=5$ te yerel minimum vardır.

$x_2=-1 \Rightarrow f''(-1)=6\cdot(-1)-12=-18<0$ olduğundan $x_2=-1$ de yerel maksimum vardır.

Buna göre

$x_1=5$ için $f(5)=5^3-6\cdot5^2-15\cdot5+2$

$=125-150-75+2$

$=-98$ yerel minimum değeridir. $(5,-98)$ yerel minimum noktasıdır.

$x_2=-1$ için $f(-1)=(-1)^3-6\cdot(-1)^2-15\cdot(-1)+2$

$=-1-6+15+2$

$=10$ yerel maksimum değeridir. $(-1,10)$ yerel maksimum noktasıdır.

Örnek

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+m$ fonksiyonunun yerel maksimum değeri 4 ise m kaçtır?

Çözüm

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+m \Rightarrow f'(x)=x^2-4x-5,\ f''(x)=2x-4$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-1$

$x_1=5$ için $f''(5)=2\cdot5-4=6>0$ olduğundan $x=5$ te yerel minimum vardır.

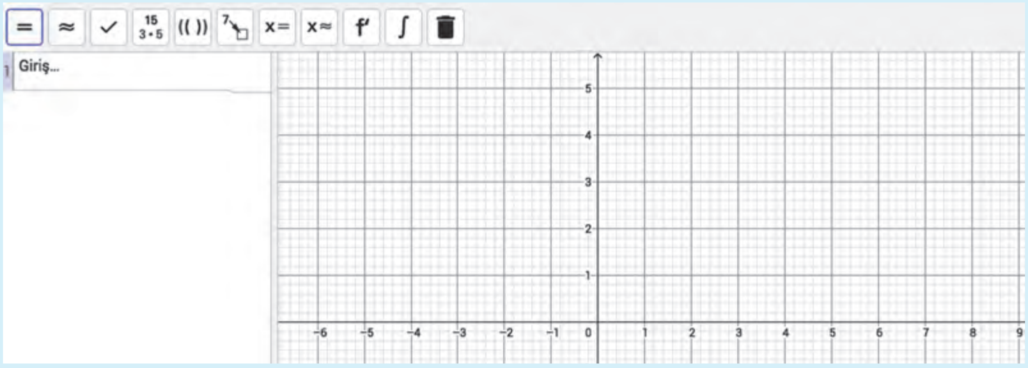
$x_2=-1$ için $f''(-1)=2\cdot(-1)-4=-6<0$ olduğundan $x=-1$ de yerel maksimum vardır.

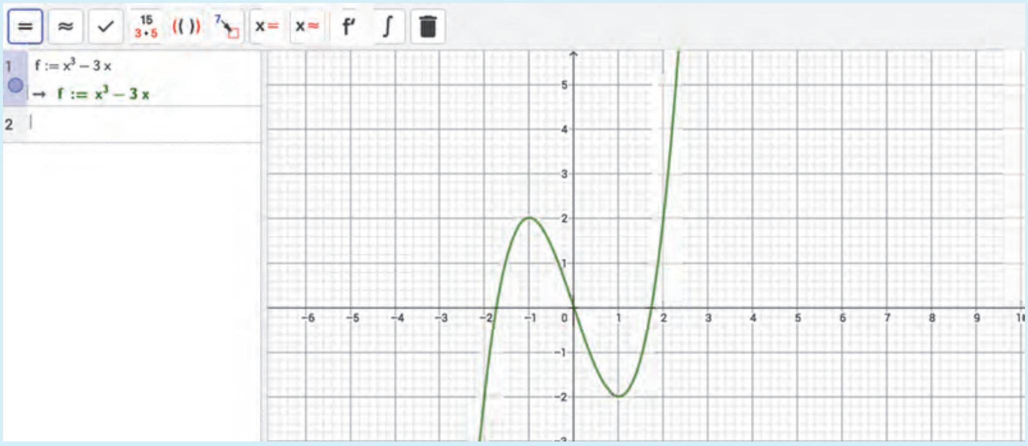
Maksimum değeri 4 olduğundan $f(-1)=4$ olmalıdır. Buna göre

$f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+m=4$

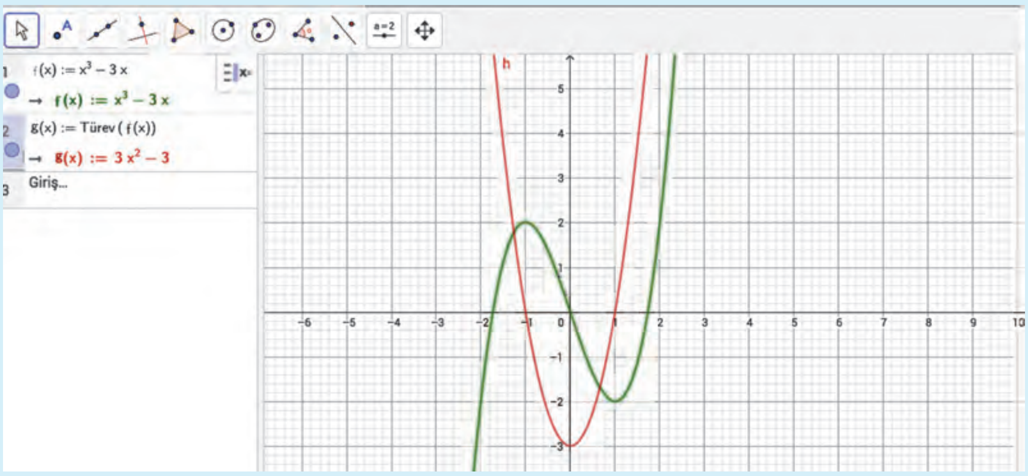
$-\frac{1}{3}-2+5+m=4 \Rightarrow -\frac{1}{3}+m=1 \Rightarrow m=1+\frac{1}{3} \Rightarrow m=\frac{4}{3}$ olur.

• GeoGebra programını çalıştırarak giriş alanına $x^3 - 3x$ fonksiyonunu yazarak bu fonksiyonun grafiğini oluşturalım.





• Türev komutunu kullanarak fonksiyonun türevinin grafiği oluşturalım.



• Grafikleri karşılaştırarak maksimum ve minimum noktaları bulunuz.

UYGULAYALIM

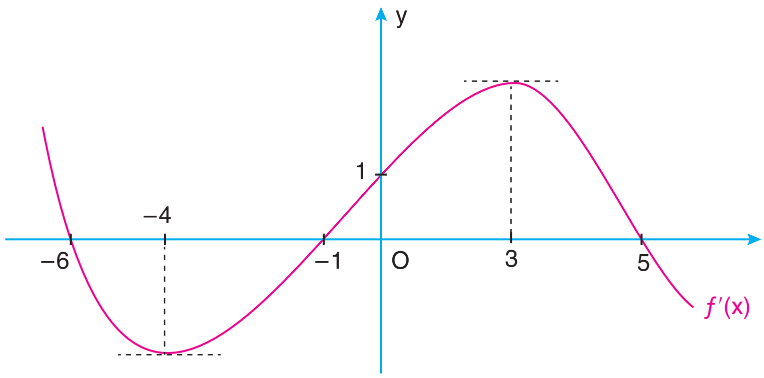
1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-75x+6$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremumlarını bulunuz.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)^3+8$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremumlarını bulunuz.

3. $f:[-4,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+5$ fonksiyonunun yerel minimumunu bulunuz.

4. $f:[-2,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^4+4x^3+5$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremumlarını bulunuz.

5.

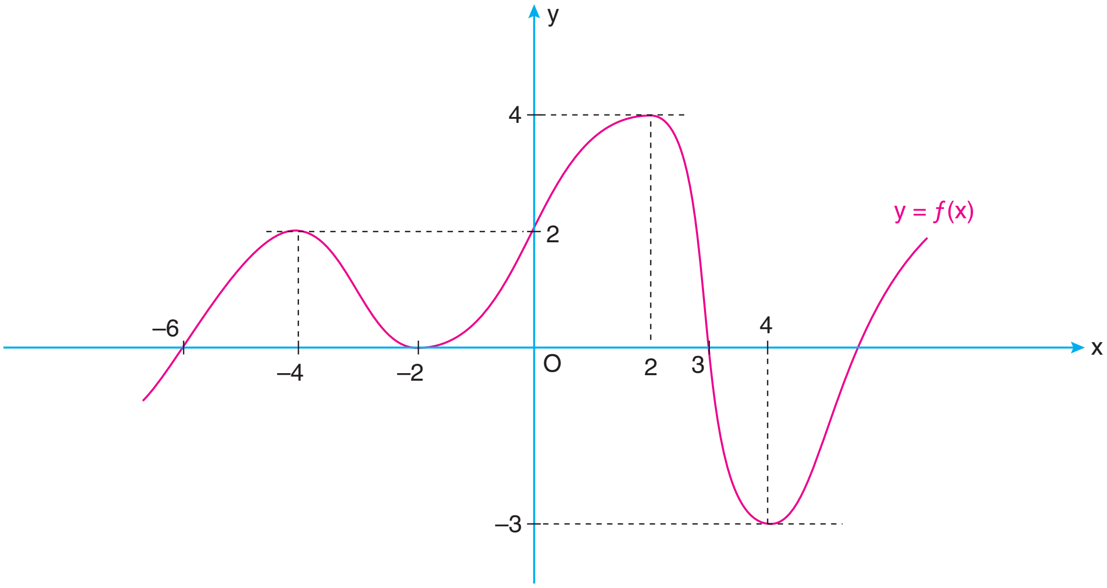


Yukarıda türevinin grafiği verilen f fonksiyonunun, x in hangi değerleri için yerel ekstremumu vardır? Bulunuz.

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulunuz.

7. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-7x+m$ fonksiyonunun yerel minimum değeri -5 olduğuna göre m kaçtır?

8.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” yazınız.

a) ☐ Yerel minimum değeri -3 ve -2 dir.

b) ☐ Yerel maksimum değeri 2 ve 4 tür.

c) ☐ Mutlak maksimum değeri 2 dir.

ç) ☐ $x \in (-2, 3)$ için $f'(x) > 0$ dır.

d) ☐ $x \in (-4, -2)$ için $f'(x) < 0$ dır.

e) ☐ $f''(-4) < 0$ dır.

f) ☐ $f''(2) > 0$ dır.

g) ☐ $f''(-2) > 0$ dır.

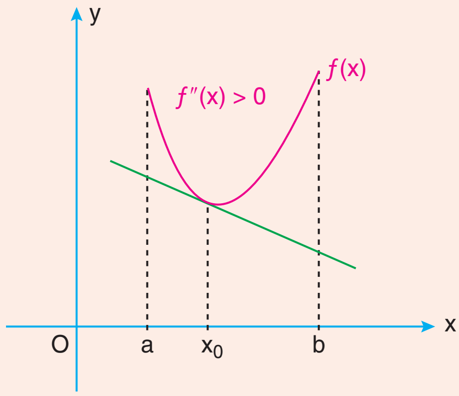
5.3.3. Türev Yardımıyla Çizilen Fonksiyon Grafikleri

$f:[a,b] \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) nda 1. ve 2. mertebeden türevli olsun.

1) $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) > 0$ oluyorsa f fonksiyonu (a,b) nda dışbükeydir (konveks).

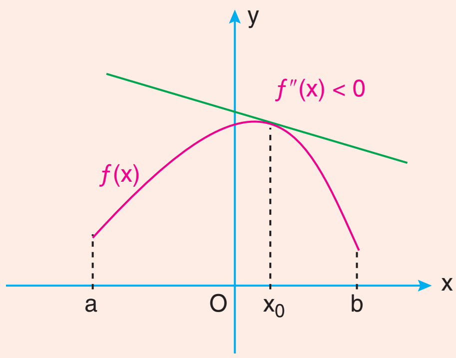
f fonksiyonunun bu aralıktaki grafiğinin eğrilik yönü yukarı doğrudur.

Eğri, (a,b) nın her noktasında teğetlerinin üzerinde kalır.



2) $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) < 0$ oluyorsa f fonksiyonu (a,b) nda içbükeydir (konkav).

f fonksiyonunun bu aralıktaki grafiğinin eğrilik yönü aşağı doğrudur. Eğri, (a,b) nın her noktasında teğetlerin altında kalır.



Örnek

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ fonksiyonunun grafiğini dışbükey ve içbükey olduğu aralıkları bulalım.

Çözüm

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f''(x) < 0$		$f''(x) > 0$
	İçbükey		Dışbükey

İşaret tablosuna göre $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ nda $f''(x) < 0$ olduğundan grafik $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ nda içbükeydir. $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ nda $f''(x) > 0$ olduğundan $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ nda grafik dışbükeydir.

Örnek

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ fonksiyonunun grafiğinin içbükey ve dışbükey olduğu aralıkları bulalım.

Çözüm

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$

$f''(x) = 6x + 6$ dır.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$

$x = -1$

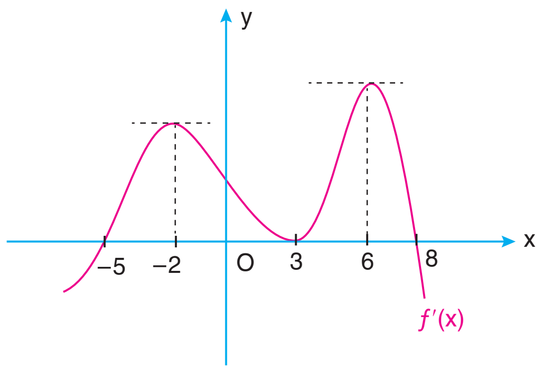
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		İçbükey		Dışbükey	

$(-\infty, -1)$ nda $f''(x) < 0$ olduğundan fonksiyonun grafiği bu aralıkta içbükeydir.

$(-1, \infty)$ nda $f''(x) > 0$ olduğundan fonksiyonun grafiği bu aralıkta dışbükeydir.

Örnek

Yanda türevinin grafiği verilen $f'(x)$ fonksiyonunun eğrilik yönünü inceleyelim.



Çözüm

Fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin işaretini incelemeliyiz. Birinci türevin azalan olduğu bölgelerde ikinci türev negatif, artan olduğu bölgelerde ikinci türev pozitiftir.

x	$-\infty$		-2		3		6		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
		Dışbükey		İçbükey		Dışbükey		İçbükey	

$y = f(x)$ fonksiyonunun $(-\infty, -2) \cup (3, 6)$ nda eğrilik yönü yukarı, $(-2, 3) \cup (6, \infty)$ nda eğrilik yönü aşağı doğrudur.

$y = f(x)$ fonksiyonunun eğrilik yönünün değiştiği noktalarda fonksiyon sürekli ise bu noktalar dönüm (büküm) noktalarıdır.

Bu noktalarda fonksiyonun ikinci mertebeden türevi işaret değiştirir. Buna göre

1) x_0 noktası f fonksiyonunun bir dönüm noktası ise $f''(x_0) = 0$ dır veya $f''(x_0)$ yoktur.

2) $f''(x_0) = 0$ ise x_0 noktası bir dönüm noktası olmak zorunda değildir.

Örnek

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8$ fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisini bulalım.

Çözüm

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

Bir x_0 noktası f fonksiyonunun dönüm noktası ise $f''(x_0) = 0$ veya $f''(x_0)$ yoktur. Buna göre

$$f''(x_0) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 24x = 0$$
$$12x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2 \text{ dir.}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		Dış bükey		İç bükey		Dış bükey	

$x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında $f''(x)$ işaret değiştirdiğinden $x = 0$ ve $x = 2$ apsisli noktalar $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktalarıdır.

Örnek

$f(x) = 2x^3 - 6x^2$ fonksiyonunun dönüm noktasını bularak bilgi ve iletişim teknolojileri yardımıyla gösterelim.

Çözüm

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0$

$x = 1$

$x = 1$ de eğrilik yönü değişmektedir.

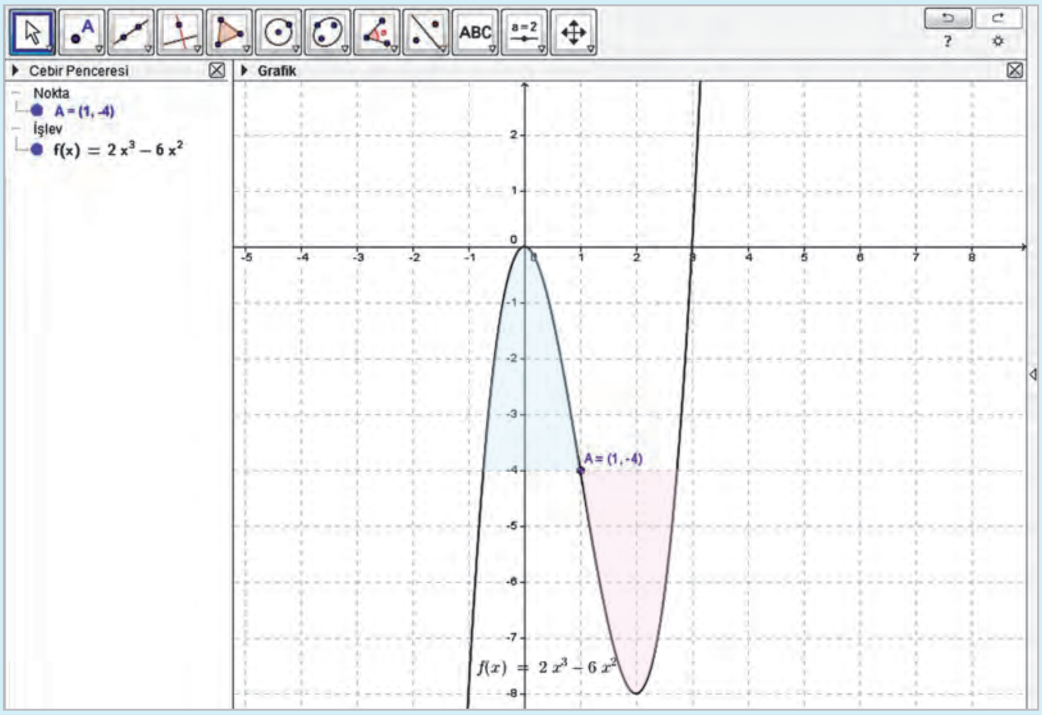
$f(x) = 2x^3 - 6x^2 \Rightarrow x = 1$ için $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2$

$= 2 - 6 = -4$

Buna göre $(1, -4)$ dönüm noktasıdır.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	-4	$\smile$	

• GeoGebra programında giriş alanına **$2x^3 - 6x^2$** yazarak grafiği oluşturalım.



• Fonksiyonun çukurluk yönü $A(1, -4)$ noktasında değiştiğinden dönüm noktası $(1, -4)$ noktasıdır.

Grafik Çizimi

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımları uygulamak kolaylık sağlar:

1) Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.

2) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur.

3) Fonksiyonun birinci türevi incelenerek varsa ekstremum noktaları bulunur.

4) Gerektiği durumda fonksiyonun ikinci türevi bulunarak grafiğin dönüm noktaları ve çukurluk yönü incelenir.

5) Değişim tablosu yapılarak bu tabloya göre grafik çizilir.

Örnek

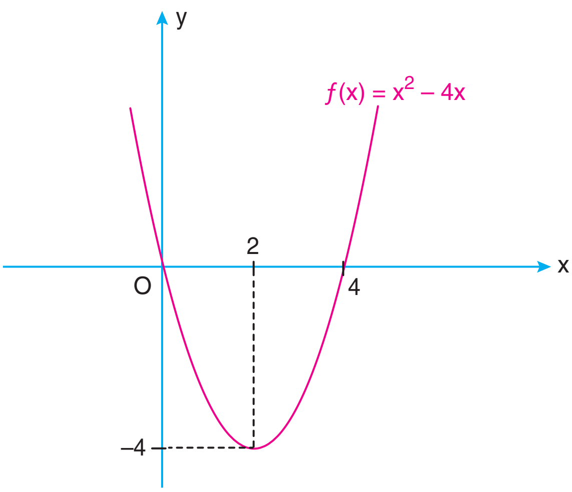
$f(x) = x^2 - 4x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

- $f(x) = x^2 - 4x$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$ olduğundan fonksiyonun grafiği, eksenleri $(0,0)$ ve $(4,0)$ noktalarında keser.
- $f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

  $x = 2$ için $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$
- $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$ olduğundan $(2, -4)$ yerel minimum noktasıdır. Ayrıca grafiğin eğrilik yönü yukarı doğrudur. Şimdi değişim tablosunu oluşturarak grafiği çizelim.

x	$-\infty$		0		2		4		∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↘	0	↘	-4 (Yerel minimum)	↗	0	↗	



Örnek

$f(x) = (x+1)\cdot(x-2)^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

- Fonksiyon $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.
- $(x+1)\cdot(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = x_3 = 2$ dir. Fonksiyonun grafiği x ekseni üzerinde $(-1, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçer.

$x = 2$ çift katlı kök olduğundan grafik $(2, 0)$ na teğettir.

$x = 0$ için $(x+1)\cdot(x-2)^2 = (0+1)\cdot(0-2)^2 = 1\cdot 4 = 4$

olduğundan grafik y eksenini $(0, 4)$ nda keser.

- $f(x) = (x+1)\cdot(x-2)^2 \Rightarrow f'(x) = (x-2)^2 + 2\cdot(x-2)\cdot(x+1)$

$$= (x-2)\cdot((x-2)+2(x+1))$$
$$= (x-2)\cdot 3x$$
$$= 3x\cdot(x-2)$$

$f'(x) = 3x\cdot(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$ dir.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0+1)\cdot(0-2)^2 = 4$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = (2+1)\cdot(2-2)^2 = 0$

$(0,4)$ ve $(2,0)$ yerel ekstremum noktalarıdır.

- $f'(x) = 3x\cdot(x-2) = 3x^2 - 6x$ ise

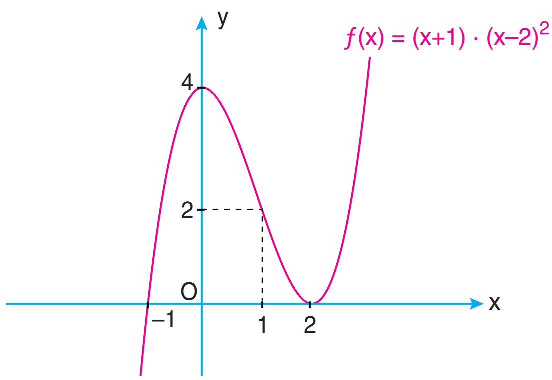
$f''(x) = 6x - 6$ ve $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$ olur.

x	$-\infty$		1		∞
$f''(x)$		−	0	+	
		İçbükey		Dışbükey	

Grafiğin dönüm noktası $(1, 2)$ dir.

- Şimdi değer tablosunu oluşturarak grafiği çizelim.

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	4	↘	0	↗	
			Yerel maksimum		Yerel minimum		



Aşağıdaki adımları takip ederek $f(x)=(x-2)\cdot(x+1)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

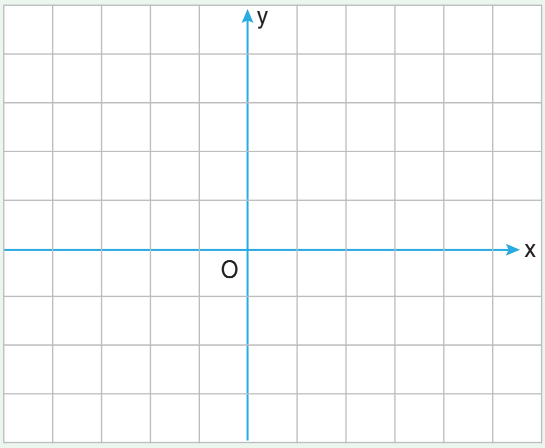
1) $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

2) Fonksiyonun x ve y eksenlerini kestiği noktaları bulunuz.

3) Fonksiyonun birinci türevini inceleyerek varsa ekstremum noktalarını bulunuz.

4) Fonksiyonun ikinci türevini inceleyerek dönüm noktalarını ve çukurluk yönünü belirleyiniz.

5) Değişim tablosunu yaparak fonksiyonun grafiğini çiziniz.



Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4x^3$ fonksiyonunun dönüm noktalarını bulalım.

Çözüm

$$f(x)=x^4-4x^3 \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x^2$$
$$f''(x)=12x^2-24x$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2-24x=0$$
$$12x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$$

$x=0$ ve $x=2$ de fonksiyonun ikinci türevi işaret değiştirdiğinden

$f(0)=0^4-4\cdot 0^3=0$

$f(2)=2^4-4\cdot 2^3=16-32=-16$ ise

dönüm noktaları $(0,0)$ ve $(2,-16)$ olur.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	0	$\cap$	-16	$\cup$	

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-mx^2+x-1$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi $x=2$ ise m kaçtır?

Çözüm

$f(x)=x^3-mx^2+x-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2mx+1$

$f''(x)=6x-2m$ dir.

Dönüm noktasının apsisi $x=2$ olduğuna göre $f''(2)=0$ dır.

$f''(x)=6x-2m \Rightarrow f''(2)=6\cdot2-2m=0$

$12-2m=0$

$2m=12$

$m=6$ olur.

Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-ax^2-bx+2$ fonksiyonunun dönüm noktası $A(-1,3)$ olduğuna göre $a+b$ toplamını bulalım.

Çözüm

$A(-1,3)\Rightarrow f(-1)=3$ tür.

$f(-1)=(-1)^3-a\cdot(-1)^2-b\cdot(-1)+2=3$

$-1-a+b+2=3$

$-a+b=2$ ...(1)

$A(-1,3)$ dönüm noktası olduğundan $f''(-1)=0$ dır.

$f(x)=x^3-ax^2-bx+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2ax-b$

$f''(x)=6x-2a$

$f''(-1)=0 \Rightarrow f''(-1)=6\cdot(-1)-2a=0$

$2a=-6$

$a=-3$

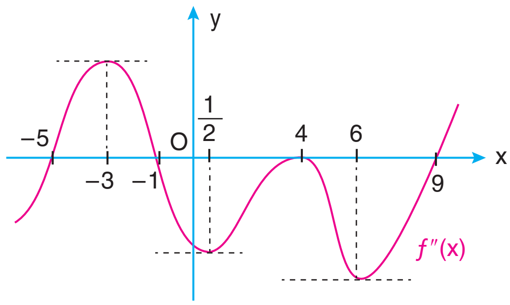
$a=-3$ değerini (1) denkleminde yerine yazalım.

$-a+b=2 \Rightarrow -(-3)+b=2 \Rightarrow 3+b=2 \Rightarrow b=-1$ dir.

Buna göre $a+b=-3+(-1)=-4$ olur.

Örnek

Yanda $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevine ait grafik verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktalarına ait apsisleri bulalım.



Çözüm

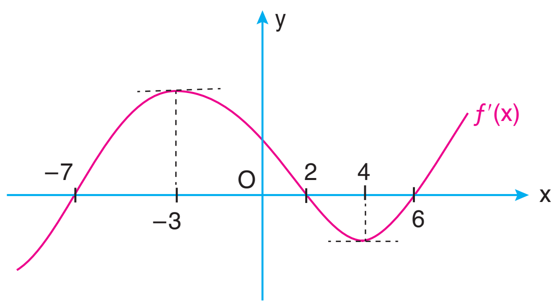
$f(x)$ fonksiyonuna ait ikinci türevin işaret incelemesini yapalım.

x	$-\infty$		-5		-1		4		9		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		⌒ İçbükey		⌣ Dışbükey		⌒ İçbükey		⌒ İçbükey		⌣ Dışbükey	

$f(x)$ fonksiyonuna ait ikinci türevin işaret değiştirdiği yani eğrilik yönünün değiştiği noktalar dönüm noktaları olduğundan bu noktaların apsisleri, -5, -1 ve 9 dur.

Örnek

Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevine ait grafik verilmiştir. Buna göre $f(x)$ in dönüm noktalarının apsislerini bulalım.



Çözüm

$(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$ nda $f'(x)$ artan olduğundan bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi pozitiftir.

$(-3, 4)$ nda $f'(x)$ azalan olduğundan bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi negatiftir.

$f''(x)$ fonksiyonu -3 ve 4 apsisli noktalarda işaret değiştirdiğinden $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktalarına ait apsisleri -3 ve 4 tür.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		⌣ Dışbükey		⌒ İçbükey		⌣ Dışbükey	

Örnek

$f(x) = x^3 + kx^2 - x + 1$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi $x = 4$ ise k kaçtır?

Çözüm

$f(x) = x^3 + kx^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2kx - 1$

$f''(x) = 6x + 2k$

$x = 4$ dönüm noktasının apsisi ise $f''(4) = 0$ dır.

Buna göre

$f''(4) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 4 + 2k = 0$

$24 + 2k = 0$

$2k = -24$

$k = -12$ olur.

UYGULAYALIM

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$ fonksiyonuna ait grafiğin içbükey ve dışbükey olduğu aralıkları bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ fonksiyonuna ait grafiğin içbükey olduğu aralığı bulunuz.

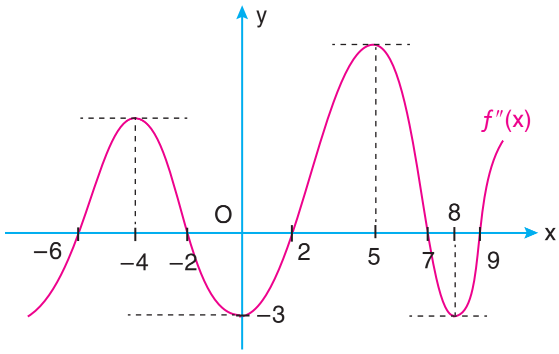
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - 6x^2$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 4$ fonksiyonunun dönüm noktası $A(-2, 6)$ olduğuna göre $m \cdot n$ kaçtır?

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^4 - 2x^3$ fonksiyonunun dönüm noktalarını bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - ax^2 + x - 3$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi $x = -2$ ise a kaçtır?

7. Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevine ait grafik verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktalarının apsislerini bulunuz.



8. Şekilde $f'(x)$ in grafiğine göre aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri yanlıştır?

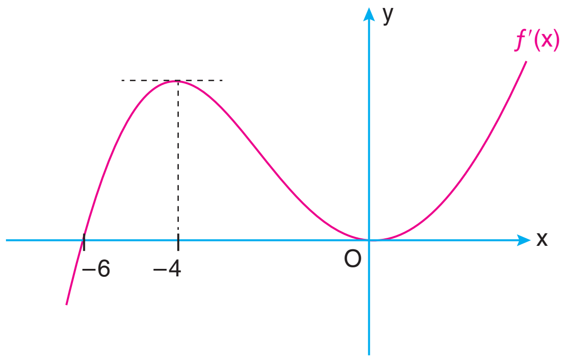
I. $(-4, 0)$ aralığında $f(x)$ artandır.

II. $f''(-2) < 0$ dır.

III. Apsisi $x = -4$ olan noktada f fonksiyonunun dönüm noktası vardır.

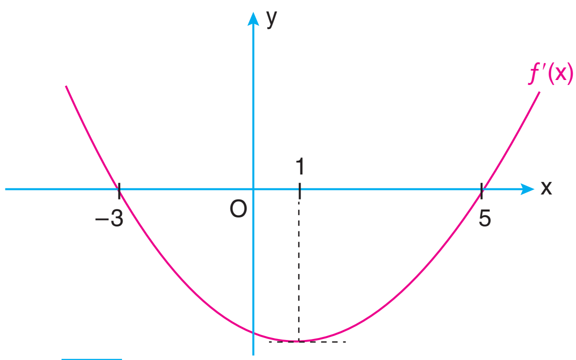
IV. $f''(-5) \cdot f''(-3) < 0$ dır.

V. Apsisi $x = 0$ olan noktada f fonksiyonunun yerel minimumu vardır.



9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x^3 + mx^2 + 4x$ fonksiyonunun dönüm noktalarından birinin apsisi -1 olduğuna göre diğer dönüm noktasını bulunuz?

10. Şekilde f fonksiyonunun türevine ait grafik verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden doğru olanların yanındaki kutucuğa "D", yanlış olanların yanındaki kutucuğa "Y" yazınız.



a) $f(x)$ in $x = -3$ te yerel maksimumu vardır. ☐

b) $f(x)$ fonksiyonu $(1, \infty)$ nda dışbükeydir. ☐

c) $f(x)$ in $x = 5$ te yerel minimumu vardır. ☐

ç) $f(x)$ in $x = 1$ de dönüm noktası vardır. ☐

d) $f(x)$, $(-3, 5)$ nda artandır. ☐

11. $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

5.3.4. Maksimum ve Minimum Problemleri

Maksimum ve minimum problemlerinde, bir çokluğun alabileceği en büyük ya da en küçük değerin bulunması istenebilir. Bu tür problemleri çözmek için

1) Maksimum ya da minimum olması istenen değer önce tek değişkene bağlı olarak yazılır.

2) Yerel ekstremum değerleri bulmak için fonksiyonun türevinden yararlanılır.

Örnek

Toplamları 14 olan pozitif iki tam sayının karelerinin toplamı <u>en az</u> kaç olur? Bulalım.

Çözüm

1. sayı x, 2. sayı y olsun. Minimumu istenen ifade,

$f:[1,14) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + y^2$ şeklinde yazılabilir.

$x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - x$ tir.

$$f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (14 - x)^2$$
$$= x^2 + 196 - 28x + x^2$$
$$= 2x^2 - 28x + 196 \Rightarrow f'(x) = 4x - 28 \text{ olur.}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 28 = 0 \Rightarrow x = 7$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Minimum	$\nearrow$	

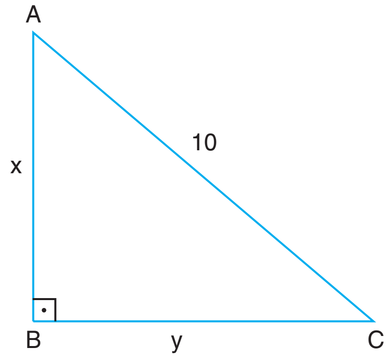
Fonksiyon $x = 7$ de minimuma sahiptir. Buna göre

$$f(x) = x^2 + (14 - x)^2 \Rightarrow f(7) = 7^2 + (14 - 7)^2$$
$$= 49 + 49$$

$= 98$ olduğundan toplamları 14 olan pozitif iki tam sayının karelerinin toplamı en az 98 dir.

Örnek

Hipotenüs uzunluğu 10 cm olan bir dik üçgenin alanı <u>en çok</u> kaç cm^2 olur? Bulalım.



Çözüm

Yandaki dik üçgene göre $Alan(\overset{\frown}{ABC}) = \dfrac{x \cdot y}{2}$ dir.

ABC dik üçgeninde $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2$

$y = \sqrt{100 - x^2}$ yazılabilir.

ABC dik üçgeninin alanını $A(x)$ ile gösterelim.

$A(x) = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$ olur. Buna göre

$A'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{100 - x^2} + \dfrac{-2x}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} \cdot x\right]$ elde edilir.

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot x\right] = 0$$

$$\sqrt{100 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$100 - x^2 = x^2$$

$$2x^2 = 100$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \mp 5\sqrt{2} \text{ olur.}$$

ABC üçgeninin hipotenüs uzunluğu 10 cm olduğundan $A(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $(0, 10)$ dır. Dolayısıyla $x = 5\sqrt{2}$ cm dir.

	$-\infty$		$-5\sqrt{2}$		$+5\sqrt{2}$		$+\infty$
$A'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$A(x)$		↘	Minimum	↗	Maksimum	↘	

Fonksiyon maksimum değerini $x = 5\sqrt{2}$ de almaktadır. Buna göre

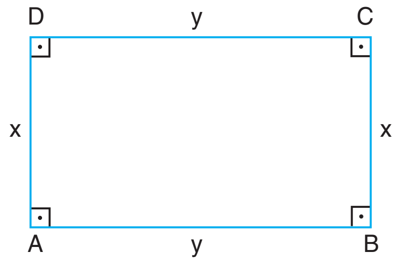
$$Alan(\overset{\frown}{ABC}) = \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{25 \cdot 2}{2} = 25 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Örnek

Çevresi 24 cm olan bir dikdörtgenin alanı <u>en çok</u> kaç cm^2 olur? Bulalım.

Çözüm



Yandaki ABCD dikdörtgenine göre

$2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$ yazılabilir.

$\text{Alan}(ABCD) = x \cdot y = x \cdot (12 - x) = 12x - x^2$

ABCD dikdörtgeninin alanını $A(x)$ ile gösterelim.

$A(x) = 12x - x^2 \Rightarrow A'(x) = 12 - 2x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$ dır.

Yandaki işaret tablosuna göre $A(x)$ fonksiyonu en büyük değerini $x = 6$ da almaktadır.

	$-\infty$	6	$+\infty$
$A'(x)$	+	0	−
$A(x)$	↗	Maksimum	↘

Buna göre ABCD dikdörtgeninin alanı en çok

$A(x) = x \cdot (12 - x) \Rightarrow A(6) = 6 \cdot (12 - 6)$

$= 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$ olur.

Örnek

Farkları 10 olan iki tam sayının çarpımı <u>en az</u> kaç olur? Bulalım.

Çözüm

Sayılar x ve y olsun. $(y > x)$ $y - x = 10 \Rightarrow y = x + 10$ olur.

$\text{Çarpım} = x \cdot y$

$= x \cdot (x + 10)$

$= x^2 + 10x$ tir.

Çarpımı $Ç(x)$ ile gösterelim.

$Ç(x) = x^2 + 10x \Rightarrow Ç'(x) = 2x + 10$

$Ç'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5$ tir.

	$-\infty$	-5	$+\infty$
$Ç'(x)$	−	0	+
$Ç(x)$	↘	Minimum	↗

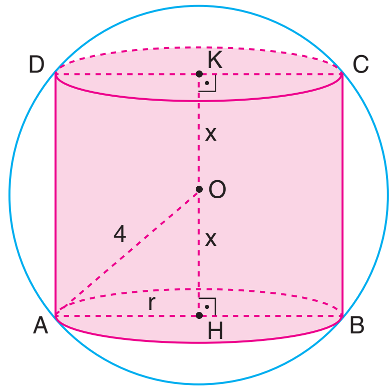
$Ç(x)$ fonksiyonu minimum değerini $x = -5$ te almaktadır.

Buna göre sayıların çarpımı en az $Ç(x) = x^2 + 10x \Rightarrow Ç(-5) = (-5)^2 + 10.(-5) = 25 - 50 = -25$ olur.

Örnek

Yarıçapının uzunluğu 4 cm olan bir küre içine çizilebilecek en büyük hacimli silindirin hacmi kaç cm^3 tür? Bulalım.

Çözüm



İstenen küre ve silindiri şekildeki gibi modelleyelim.

Kürenin merkezi O, silindirin yüksekliği $[KH]$,

$|AH| = r$, $|KO| = |OH| = x$ ve $|AO| = 4$ cm olsun.

$\widehat{AHO}$ nde $x^2 + r^2 = 4^2 \Rightarrow r^2 = 16 - x^2$ yazılabilir.

Silindirin hacmi, $V = \pi r^2 \cdot h$ ise

$V(x) = \pi \cdot (16 - x^2) \cdot 2x$

$= \pi \cdot (32x - 2x^3)$ fonksiyonunu yazabiliriz.

$V(x) = \pi \cdot (32x - 2x^3) \Rightarrow V'(x) = \pi \cdot (32 - 6x^2)$ dir.

$V'(x) = 0 \Rightarrow \pi \cdot (32 - 6x^2) = 0$

$32 - 6x^2 = 0$

$6x^2 = 32$

$x^2 = \dfrac{16}{3} \Rightarrow x = \mp \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm dir.

	$-\infty$	$-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$		$+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$V'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$V(x)$	$\searrow$	Minimum	$\nearrow$	Maksimum	$\searrow$

AHO dik üçgeninde hipotenüs 4 cm olduğundan $x \in (0, 4)$ dır.

$V(x)$ fonksiyonu maksimum değerini $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ te alır.

Buna göre silindirin hacmi en büyük,

$$V(x) = \pi(32x - 2x^3) \Rightarrow V\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \pi\left(32 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)$$

$$= \pi\left(\frac{128\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot 64 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{27}\right)$$

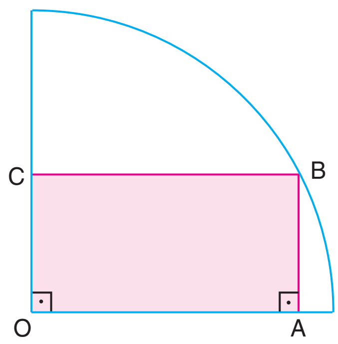
$$= \pi \cdot \left(\frac{128\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{384\sqrt{3} - 128\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{256\sqrt{3}}{9}\right) cm^3 \text{ olur.}$$

Örnek

Yandaki şekilde O merkezli ve 4 cm yarıçaplı çeyrek daire içine çizilen OABC dikdörtgeninin alanı <u>en çok</u> kaç cm^2 olur? Bulalım.

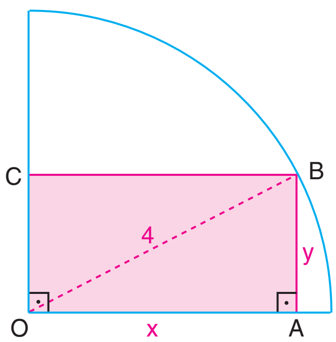


Çözüm

$\overset{\frown}{OAB}$ de $x^2+y^2=4^2 \Rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$ yazılabilir.

$\text{Alan}(OABC)=x\cdot y=x\cdot\sqrt{16-x^2}$ ise $A(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2}$

fonksiyonunu yazabiliriz.



Fonksiyonun türevini alarak ekstremum değerlerini bulalım.

$$A(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2} \Rightarrow A'(x)=\sqrt{16-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{16-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=0$$

$$\sqrt{16-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$x^2=16-x^2$$

$$2x^2=16$$

$$x^2=8$$

$$x=\mp 2\sqrt{2}\ \text{cm olur.}$$

	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$		$+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$A'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$A(x)$	↘	Minimum	↗	Maksimum	↘

OAB üçgeninde hipotenüs 4 cm olduğundan $x\in(0,4)$ dır.

$A(x)$ fonksiyonu maksimum değerini $x=2\sqrt{2}$ de alır. Buna göre OABC dikdörtgeninin alanı en çok,

$$A(x)=x\cdot\sqrt{16-x^2} \Rightarrow A(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{16-(2\sqrt{2})^2}$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{16-8}$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$

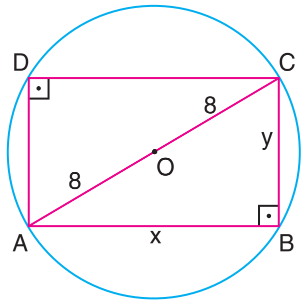
$$=2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}$$

$$=8\ \text{cm}^2\ \text{olur.}$$

Örnek

Alanı 64π br^2 olan dairenin içine çizilebilecek bir dikdörtgenin alanı <u>en çok</u> kaç br^2 olur? Bulalım.

Çözüm



$64\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$ br

$|AB| = x$ ve $|BC| = y$ olsun.

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16^2$

$$x^2 + y^2 = 256 \Rightarrow y^2 = 256 - x^2$$

$$y = \sqrt{256 - x^2}$$

ABCD dikdörtgeninin alanı $A(ABCD) = x \cdot y$ olduğundan

$A(x) = x \cdot \sqrt{256 - x^2}$ dir.

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{256 - x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{256 - x^2}} \cdot x = 0 \Rightarrow \sqrt{256 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{256 - x^2}} = 0$$

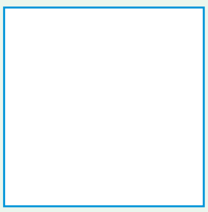
$256 - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 256 \Rightarrow x^2 = 128 \Rightarrow x = \mp 8\sqrt{2}$ olur.

Uzunluk negatif olamayacağından $x = 8\sqrt{2}$ br dir.

$x = 8\sqrt{2}$ için $y = \sqrt{256 - (8\sqrt{2})^2} = 8\sqrt{2}$ br

$A(ABCD) = 8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 128$ br^2 olur.

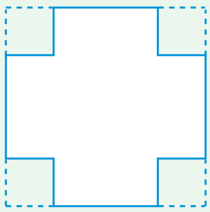
	$-\infty$		$-8\sqrt{2}$		$+8\sqrt{2}$		$+\infty$
$A'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$A(x)$		↘	Minimum	↗	Maksimum	↘	



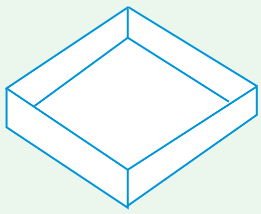
24 cm

24 cm

Kare karton



Dört eşit kare kesildikten sonra



Kutu

Bir kenarı 24 cm olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden aynı büyüklükte dört kare karton parçası kesilerek çıkarılıyor. Kalan kısım katlanarak dikdörtgenler prizması şeklinde üstü açık bir kutu yapılıyor.

- Köşelerden kesilen kare şeklindeki kartonların kenar uzunluğunun 4 cm olması durumunda bu kutunun hacmini bulunuz.
- Köşelerden kesilen kare şeklindeki kartonların kenar uzunluğunun 8 cm olması durumunda bu kutunun hacmini bulunuz.
- Köşelerden kesilen kare şeklindeki kartonların kenar uzunluğunun kaç cm olması durumunda bu kutunun hacmi maksimum değerini alır?

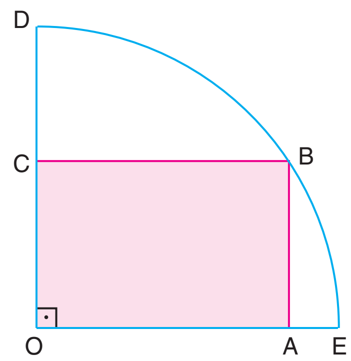
UYGULAYALIM

1. Toplamları 24 olan pozitif iki tam sayının karelerinin toplamı en az kaç olur?

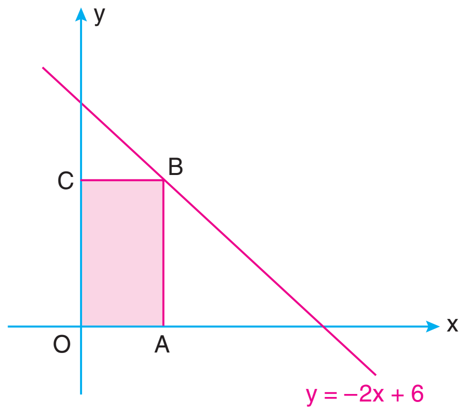
2. Çarpımları 36 olan pozitif iki reel sayının toplamı en az kaç olur?

3. Çevresi 20 cm olan bir dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 olur?

4. O merkezli çeyrek dairede $B \in \overset{\frown}{DE}$, $|OD| = 6$ cm ise OABC dikdörtgeninin alanı en çok kaç cm^2 olur?



5. Şekildeki OABC dikdörtgeninin B köşesi $y = -2x + 6$ doğrusu üzerindedir. Buna göre dikdörtgenin alanı en çok kaç br^2 olur?



6. Yarıçapının uzunluğu 6 cm olan bir kürenin içine çizilebilen en küçük hacimli silindirin hacmi kaç cm^3 tür?

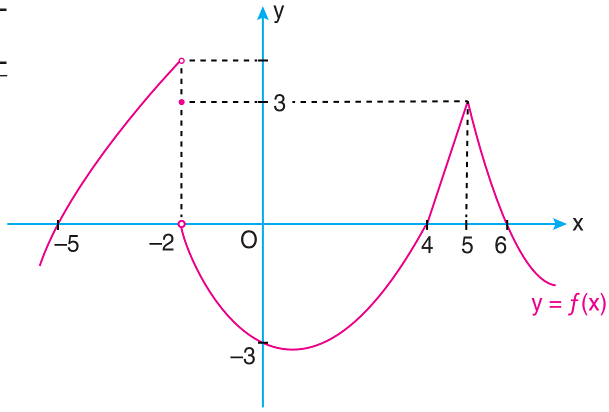
7. Yarıçapının uzunluğu 4 cm olan bir daire içine köşeleri çember üzerinde olan bir dikdörtgen çiziliyor. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 olabilir?

8. Hipotenüs uzunluğu 20 cm olan bir dik üçgenin alanı en çok kaç cm^2 olur?

9. Yarıçapı 5 cm olan bir küre içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli silindirin yüksekliği kaç cm dir?

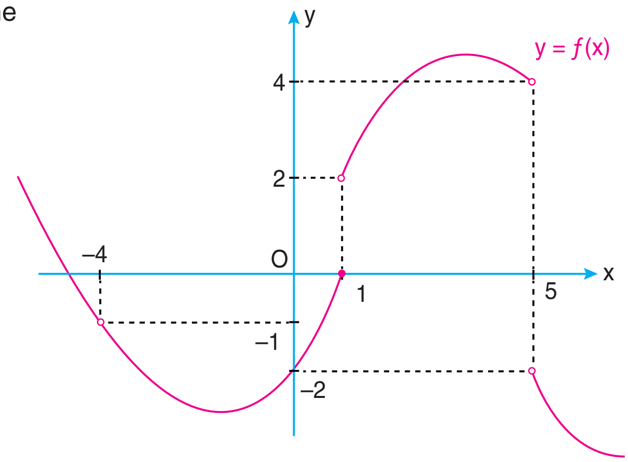
5. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?



A) $\lim_{x \to -5} f(x) = 0$
B) $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 3$
C) $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$
D) $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$
E) $\lim_{x \to 6^-} f(x) = 0$

2. Yanda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?



I. $\lim_{x \to -4^-} f(x) = -1$

II. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

III. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

IV. $\lim_{x \to 5^-} f(x) = -2$

V. $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

VI. $\lim_{x \to -4^+} f(x) = -1$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

3. $\lim_{x \to 12} \dfrac{x^2 - 144}{x - 12}$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 10
B) 12
C) 16
D) 20
E) 24

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2 - 1}{x^2}$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -5 B) -3 C) 0 D) 3 E) 5

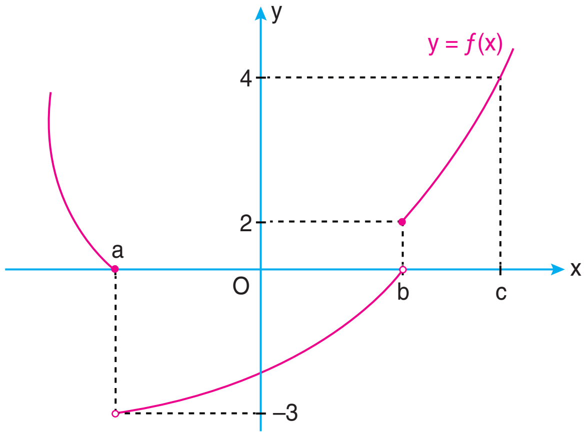
5. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-2x$ B) $-x$ C) 0 D) x E) 2x

6. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) + \lim\limits_{x \to b^-} f(x) - \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$

toplamı kaçtır?



A) -9 B) -7 C) -5 D) 5 E) 7

7. Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

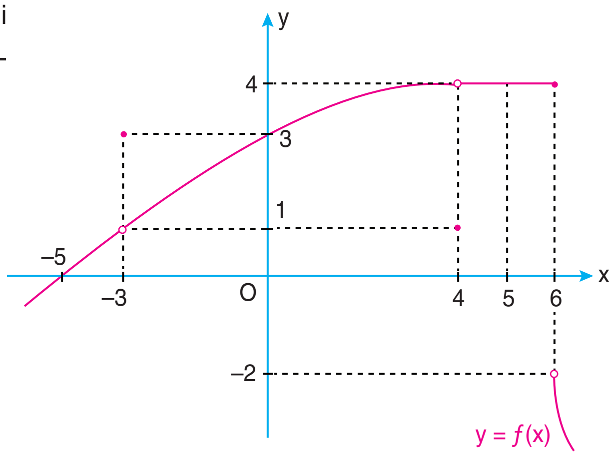
A) $x = -3$ te süreksizdir.

B) $x = -5$ te süreklidir.

C) $x = 0$ da süreklidir.

D) $x = 4$ te süreklidir.

E) $x = 5$ te süreklidir.



8. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^8$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

10. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^4 - 1$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) -8 B) -6 C) -4 D) -2 E) 2

11. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 2x$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 24 C) 28 D) 30 E) 32

12. $f(x) = (2x^3 + 1)^3$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $18x \cdot (2x^3 + 1)$ B) $18 \cdot (2x^3 + 1)$ C) $18x^2 \cdot (2x^3 + 1)^2$

D) $18x \cdot (6x^2 + 1)$ E) $18x \cdot (6x^2)^2$

13. $f(x) = \dfrac{mx - 2}{x + 1}$ ve $f'(1) = 2$ ise m kaçtır?

A) -6 B) -3 C) 6 D) 3 E) 1

14. $\dfrac{d}{dx}(x^3 + 2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $3x$ B) $3x + 2$ C) $3x^2 + 2$ D) $3x^2$ E) $3x^3$

15. $f(x) = -3\sqrt{x}$ olduğuna göre $f'(9)$ kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

16. $f(x) = x^2 - 1$ olduğuna göre $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ limiti aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

17. $f(x) = \frac{1}{x}$ ise $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{x^3}$ B) $-\frac{6!}{x^3}$ C) $\frac{6}{x^4}$ D) $\frac{6!}{x^4}$ E) $\frac{3}{x^4}$

18. $f(x) = 4x^2 + 2,\ g(x) = 2x - 1$ olduğuna göre $(f + g)'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6x + 1$ B) $8x + 2$ C) $8x - 2$ D) $10x + 1$ E) $10x + 2$

19. $f(x) = (x - 1)^2,\ g(x) = x^2 + x$ olduğuna göre $(gof)'(2)$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

20. $f(x) = mx^3 + x^2 + nx - 1$ olmak üzere $f'(1) = 4$ ve $f''(-1) = 2$ ise $m + n$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. $f(x) = 2x^2 + 2$ olduğuna göre $\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ değeri kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. $f(x + 2) = 2x^2 + x + 1$ olduğuna göre $f'(1) + f(1)$ kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

23. $f(x) = x^2 - 2x + a$ fonksiyonunun yerel minimum değeri 4 ise a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 8

24. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + 4$ fonksiyonunun dönüm noktası aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(1,1)$ B) $(1,4)$ C) $(2,4)$ D) $(2,6)$ E) $(2,8)$

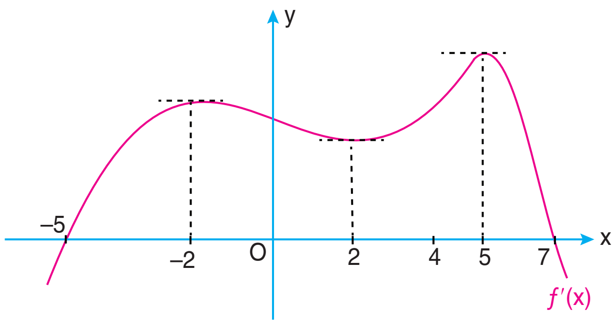
25. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli dönüm noktasındaki teğetinin eğimi 2 olduğuna göre b kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

26. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$ fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

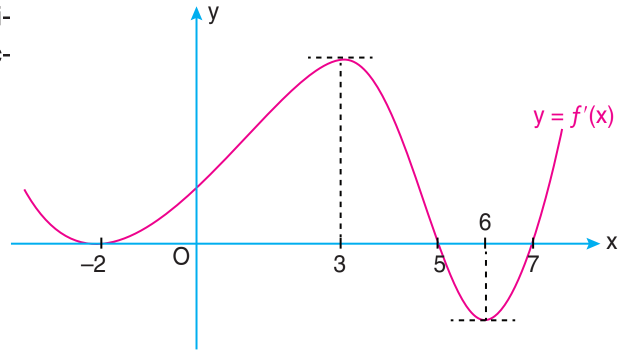
A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

27. Türevinin grafiği yanda verilen f fonksiyonu, hangi x değeri için maksimum değerini alır?



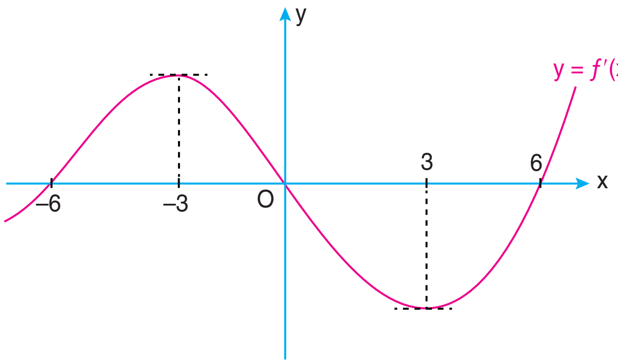
A) -5 B) -2 C) 2 D) 5 E) 7

28. Yanda türevinin grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?



A) -2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

29. Yanda verilen $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre f fonksiyonuna ait dönüm noktalarının apsislerinin toplamı kaçtır?



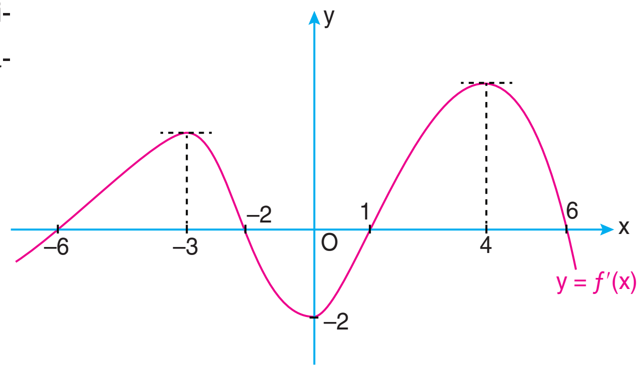
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

30. Yanda verilen $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki aralıklardan hangisinde daima azalandır?

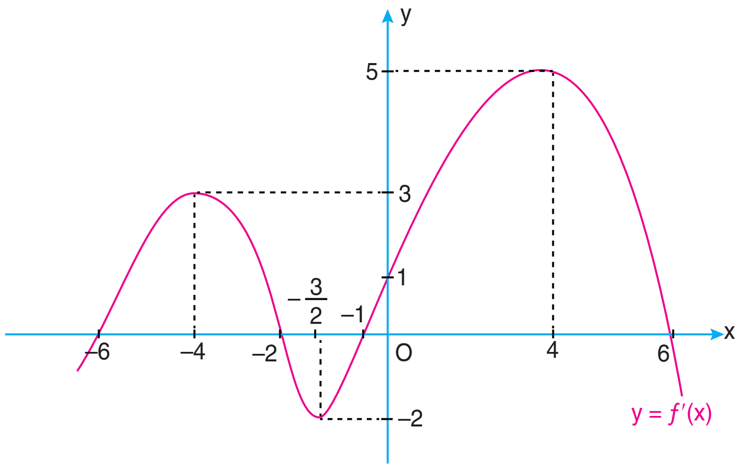
A) $[-6,-3]$ B) $[-3,-2]$

C) $[-3,1]$ D) $[-2,6]$

E) $[-2,1]$



31.



Yukarıda verilen $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $(4, 5)$ noktası f fonksiyonunun dönüm noktasıdır.

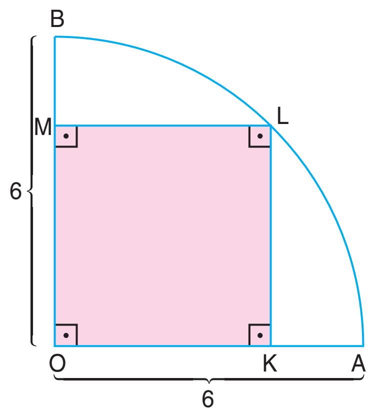
B) $(-4, 3)$ noktası f fonksiyonunun dönüm noktasıdır.

C) $(0, 1)$ noktası f fonksiyonunun dönüm noktasıdır.

D) $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$ nda f fonksiyonu içbükeydir.

E) $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ nda f fonksiyonu dışbükeydir.

32. Yandaki şekilde merkezi O, yarıçapı $|OA| = |OB| = 6$ cm olan çeyrek çember yayı üzerindeki bir L noktasından yarıçaplara inilen dikme ayakları K ve M noktalarıdır. Buna göre OKLM dikdörtgeninin alanı en çok kaç cm^2 dir?



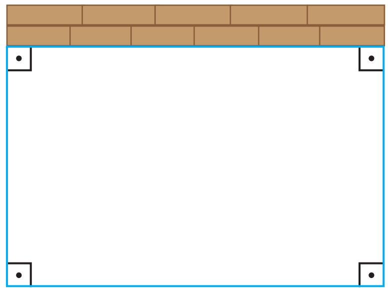
A) 6 B) 9 C) 12
D) 15 E) 18

33. Dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin $[AD]$ kenarının tümü ile $[AB]$ kenarının yarısına şekildeki gibi duvar örülmüş, kenarlarının geriye kalan kısmına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 240 metre olduğuna göre bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olur?



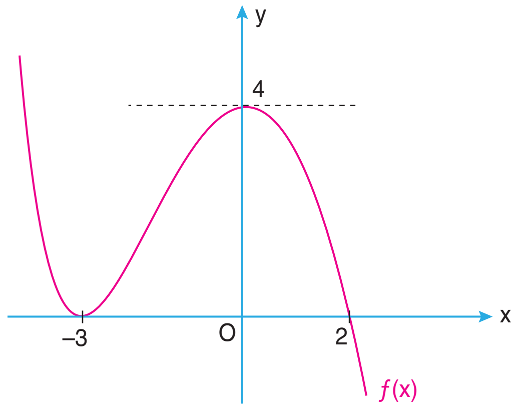
A) 2400 B) 4800 C) 6400
D) 9600 E) 12000

34. Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve bir kenarında duvar bulunan bir bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 160 m olduğuna göre bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olur?



A) 2400 B) 3200 C) 3600
D) 4000 E) 4800

35. Yandaki şekilde 3. dereceden bir $f(x)$ polinomunun grafiği verildiğine göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



A) $x=-3$ için $f'(x)=0$ dır.

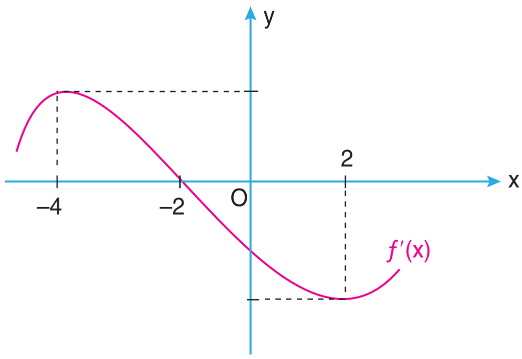
B) $x=-3$ için $f(x)=0$ dır.

C) $x=2$ için $f(x)=0$ dır.

D) $x=0$ için $f(x)=4$ tür.

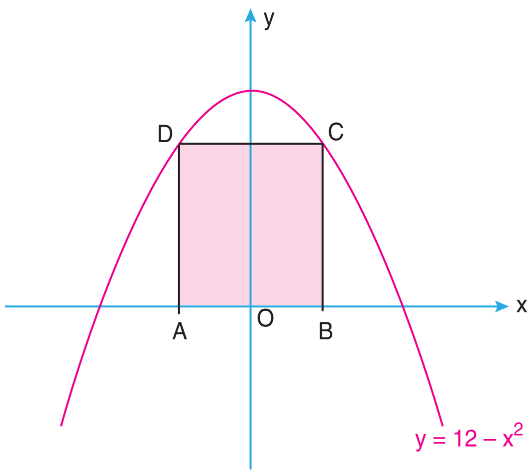
E) $x=-2$ için $f'(x)<0$ dır.

36. Yandaki grafik $f(x)$ fonksiyonunun türevine aittir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarından birinin apsisidir?



A) -4 B) -2 C) 0
D) 1 E) 2

37. A ve B noktaları OX ekseni üzerinde, C ve D noktaları ise $y=12-x^2$ parabolü üzerinde pozitif ordinatlı noktalar olmak üzere şekildeki gibi ABCD dikdörtgeni oluşturuluyor. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç birim karedir?

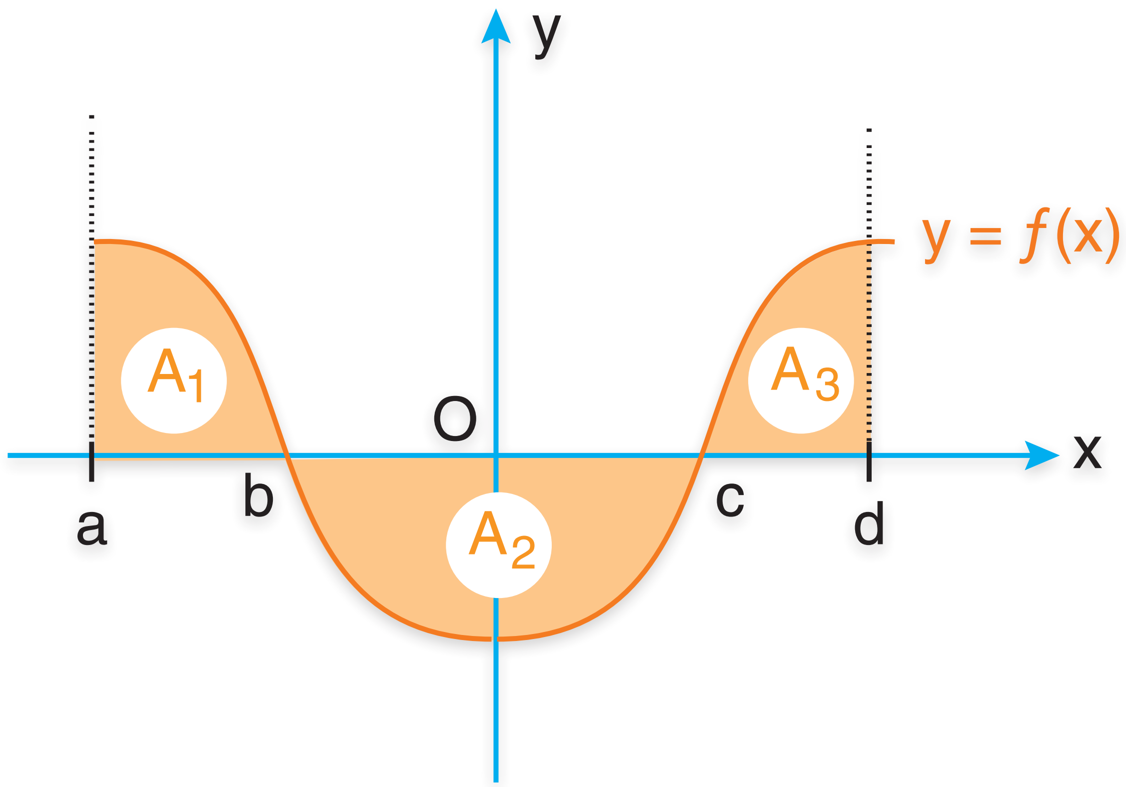


A) 4 B) 8 C) 16
D) 32 E) 64

SAYILAR VE CEBİR

İNTEGRAL

6. ÜNİTE



6.1. BELİRSİZ İNTEGRAL

6.1.1. Bir Fonksiyonun Belirsiz İntegrali

$y = F(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ ifadesinde C gerçek sayı olmak üzere $F(x) + C$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **belirsiz integrali** denir.

Örnek

$\int 3x^2 dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$f(x) = 3x^2$ ve $F'(x) = f(x)$ olduğundan

$F(x) = x^3 \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ dir.

Buna göre $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ dir.

$F(x) = x^3 + 1, F(x) = x^3 - 2, F(x) = x^3 + 5$ gibi fonksiyonlar olabileceğinden sabit değerler yerine C yazılır.

Örnek

$\int 9x^8 dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$f(x) = 9x^8$ ve $F'(x) = f(x)$ olduğundan

$F(x) = x^9 \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ dir. Buna göre $\int 9x^8 dx = x^9 + C$ olur.

Örnek

$\int x^5 dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$f(x) = x^5$ ve $F'(x) = f(x)$ olduğundan $F(x) = \frac{x^6}{6} \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ dir.

Buna göre $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$ olur.

Örnek

$\int x^{-4}dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C = \frac{x^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{3x^3}+C \text{ bulunur.}$$

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$

$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ tir.

Örnek

$\int 3x^{\frac{1}{2}}dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int 3x^{\frac{1}{2}}dx = 3 \cdot \int x^{\frac{1}{2}}dx = 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = 2x^{\frac{3}{2}}+C = 2\sqrt{x^3}+C \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\int \frac{5}{x^4}dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int \frac{5}{x^4}dx = \int 5 \cdot x^{-4}dx = 5 \cdot \int x^{-4}dx = 5 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C = 5 \cdot \frac{x^{-3}}{-3}+C = -\frac{5}{3x^3}+C \text{ olur.}$$

Örnek

$\int (3x^2 - 2x + 1)dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int (3x^2 - 2x + 1)dx = \int 3x^2 dx - \int 2xdx + \int dx$$
$$= 3\int x^2 dx - 2\int xdx + \int dx$$
$$= 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C$$
$$= x^3 - x^2 + x + C \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\int (4x-1)^2 dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int (4x-1)^2 dx = \int (16x^2 - 8x + 1)dx$$
$$= \int 16x^2 dx - \int 8xdx + \int dx$$
$$= 16\int x^2 dx - 8\int xdx + \int dx$$
$$= 16\frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$$
$$= \frac{16}{3}x^3 - 4x^2 + x + C \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\int x(x+2)^2 dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int x(x+2)^2 dx = \int x.(x^2 + 4x + 4)dx = \int (x^3 + 4x^2 + 4x)dx$$
$$= \int x^3 dx + \int 4x^2 dx + \int 4xdx$$
$$= \int x^3 dx + 4\int x^2 dx + 4\int xdx$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 2x^2 + C \text{ dir.}$$

Örnek

$\int \frac{x^2-2x}{x^4}dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\int \frac{x^2-2x}{x^4}dx = \int x^{-4}(x^2-2x)dx$$
$$= \int (x^{-2}-2x^{-3})dx$$
$$= \int x^{-2}dx - \int 2x^{-3}dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \cancel{2}\frac{x^{-2}}{-\cancel{2}} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + C$$

6.1.2. Değişken Değiştirme Yoluyla İntegral Alma İşlemi

Birçok integral işlemi temel integral alma kuralları ile yapılamayabilir veya çözüm çok uzun işlemler gerektirebilir.

Bu durumda değişken değiştirme tekniklerinden yararlanılabilir.

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$ biçimindeki integralleri hesaplamak için $u = g(x)$ dönüşümü yapılır.

$\mathbf{u = g(x) \Rightarrow du = d[g(x)]}$

$\mathbf{du = g'(x)dx}$ yazılabilir.

Bu durumda, $\int \mathbf{f(g(x)) \cdot g'(x)dx} = \int \mathbf{f(u)du}$ olur.

$\int f(u)du$ integrali alındıktan sonra u yerine $g(x)$ yazılarak sonuç x değişkenine göre düzenlenir.

Örnek

$\int (x^2-x+2)^5 \cdot (2x-1)dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$u = x^2-x+2 \Rightarrow du = (2x-1)dx$ olur.

$\int (x^2-x+2)^5 \cdot (2x-1)dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6}(x^2-x+2)^6 + C$ dir.

Örnek

$\int (x^2+1)^4 \cdot 2xdx$ ifadesini değişken değiştirme yoluyla hesaplayalım.

Çözüm

$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$ olur.

$$\int (x^2+1)^4 \cdot 2xdx = \int u^4 du$$
$$= \frac{u^5}{5} + C$$
$$= \frac{1}{5}(x^2+1)^5 + C$$

Örnek

$\int (3x-7)^9 dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$\int (3x-7)^9 dx$ integralini almak için $(3x-7)^9$ ifadesinin açınımı yapılmalıdır.

Bu da uzun işlemler gerektirdiğinden değişken değiştirme tekniğinden yararlanalım.

$\int (3x-7)^9 dx = \frac{1}{3} \cdot \int (3x-7)^9 \cdot 3dx$ yazılabilir.

$u = 3x - 7$ olsun

$du = (3x-7)'dx \Rightarrow du = 3dx$ olur.

Şimdi bu ifadeleri $\int (3x-7)^9 dx$ ifadesinde yerine yazalım.

$$\int (3x-7)^9 dx = \frac{1}{3}\int (3x-7)^9 \cdot 3dx$$
$$= \frac{1}{3}\int u^9 du$$
$$= \frac{1}{3}\frac{u^{10}}{10} + C \text{ olur.}$$

$u = 3x - 7$ olduğundan

$$\frac{1}{3}\frac{u^{10}}{10} + C = \frac{1}{30}(3x-7)^{10} + C \Rightarrow \int (3x-7)^9 dx = \frac{1}{30} \cdot (3x-7)^{10} + C \text{ olur.}$$

Örnek

$\int \sqrt[3]{x^2+4x+5}\cdot(x+2)dx$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$u = x^2+4x+5 \Rightarrow du = (2x+4)dx \Rightarrow \frac{1}{2}du = (x+2)dx$ olur.

$$\int \sqrt[3]{x^2+4x+5}\cdot(x+2)dx = \int \sqrt[3]{u}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int u^{\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\cdot(x^2+4x+5)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{(x^2+4x+5)^4} + C \text{ dir.}$$

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $\int (x^3-1)dx$

b) $\int (x^2-2x+1)dx$

c) $\int (4x^3+3x^2-2x+1)dx$

ç) $\int (1+2x+3x^2-5x^3)dx$

2. Aşağıdaki integralleri değişken değiştirme tekniğini kullanarak hesaplayınız.

a) $\int (2x-7)^5 dx$

b) $\int (3x-1)^2 dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^2+4x-1}\cdot(x+2)dx$

ç) $\int 2x(x^2-1)dx$

3. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $\int x^3\cdot(x-1)dx$

b) $\int (2x^2-1)\cdot(x^3-2x)dx$

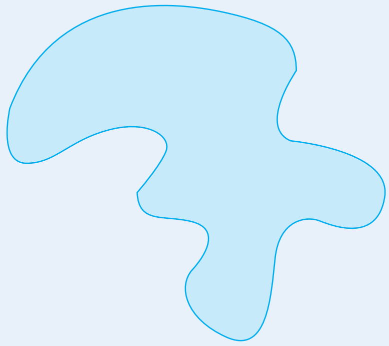
c) $\int (1-x)\cdot x dx$

ç) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)dx$

6.2. BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

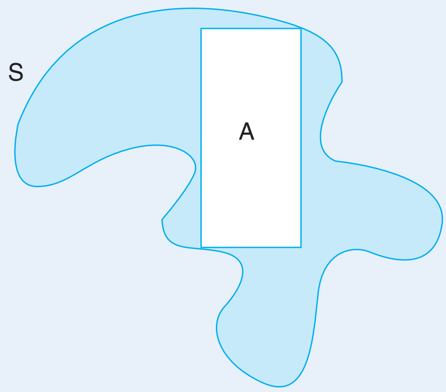
Alan hesabı yüzyıllardan beri insanların ihtiyaç duyduğu bir konu olmuştur. Bir göl yüzeyinin alanını ölçmek, bir bina yapmak amacıyla zemininin alanını ölçmek, miras kalan bir arazinin eşit bir şekilde paylaşımını sağlamak vb. alan hesabını gerekli kılmıştır.

İlkokuldan beri işlenen bir konu olduğu için alan hesaplamak bize pek kolay ve sıradan gelebilir. Oysa hiç öyle değildir. Alan ölçmek, uzunluk ölçmekten çok daha zordur. Uzunluk ölçmek için metre kullanılır. Alan ölçmek için de planimetre isimli bir alet kullanılsa da bu alet karmaşık bir yapıya sahiptir.



Bir ipi bir çemberin çevresine dolayarak çemberin uzunluğunu, aşağı yukarı ölçebiliriz ama dairenin alanını ölçmek daha zordur. Ya da daireden çok daha karmaşık olan yandaki görünüme sahip bir gölet yüzeyinin alanını nasıl hesaplarsınız?

Düzlemde sınırlı bir S kümesi alalım. Bu kümenin alanını hesaplamak istiyoruz. Sezgilerimizden yararlanalım. Şeklin içine yandaki gibi bir A dikdörtgeni çizelim.



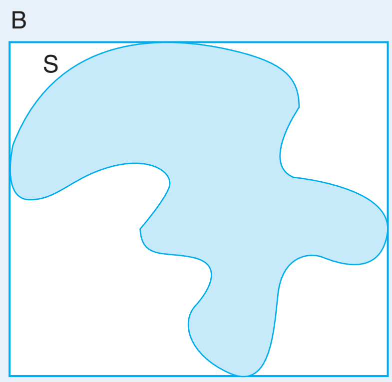
$\text{alan}(A) \leq \text{alan}(S)$

Elbette S nin alanı en az içindeki A dikdörtgeninin alanı kadar olmalıdır.

Bir de S yi içeren bir B dikdörtgeni çizelim. Bu sefer S nin alanının B nin alanını aşamayacağını biliyoruz. Bu durumda

$$\text{alan}(A) \leq \text{alan}(S) \leq \text{alan}(B)$$

eşitsizlikleri doğru olmalıdır. Böylece eğer A ve B dikdörtgenlerinin alanını biliyorsak belki S nin alanını bilemeyiz ama hiç olmazsa S alanının alt ve üst sınırlarını bulabiliriz.

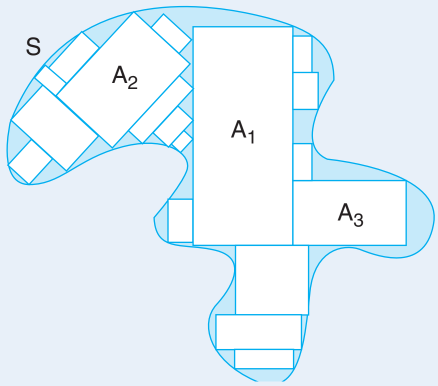


$\text{alan}(S) \leq \text{alan}(B)$

Daha iyisini yapabilir miyiz? S nin içine tek bir dikdörtgen yerleştireceğimize yandaki şekilde görüldüğü gibi daha fazla sayıda dikdörtgen de yerleştirebiliriz.

Bu dikdörtgenlerin sayısı sonsuza yaklaştıkça alanlarının toplamı S nin alanına en yakın değeri alacaktır.

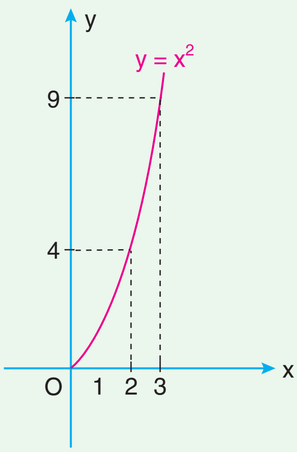
Değeri formülle hesaplanamayan alanlar uygun toplamların limiti olarak ifade edilebilir.



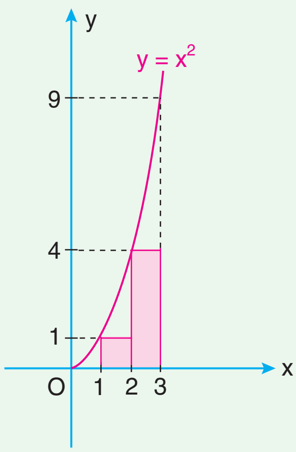
6.2.1. Riemann (Riman) Toplamı

$y = x^2$ eğrisi, x ekseni ve $x = 3$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin alanını, dikdörtgenlerin alanları yardımıyla tahmin edelim.

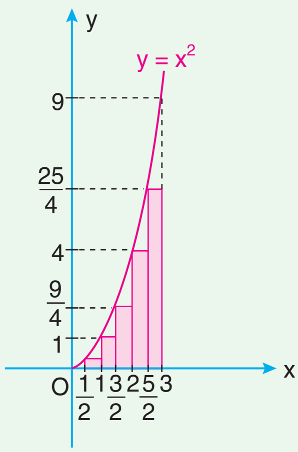
Eğrinin altında kalan dikdörtgenleri ele alalım.



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

Şekil 2 deki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

$(0)^2 \cdot 1 + (1)^2 \cdot 1 + (2)^2 \cdot 1 = 1 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2) = 5\,\text{br}^2$ olur.

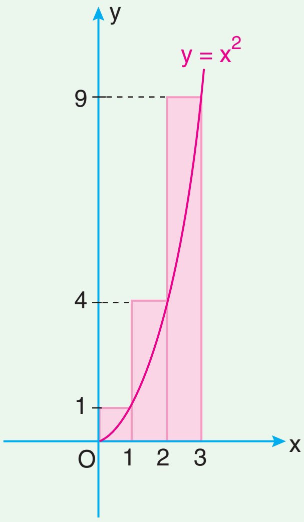
Şekil 3 teki dikdörtgenlerin toplam alanı,

$$(0)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

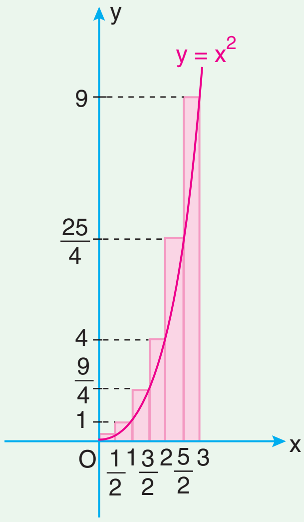
$$= \frac{55}{8} = 6{,}875\,\text{br}^2 \text{ olur.}$$

- Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanlardaki işlemleri yaparak toplam alanları bulunuz.

Parça Sayısı	Alan Hesaplama	Toplam Alan
3	$\frac{3}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]=1(0+1+4)$	5
6	$\frac{3}{6}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{4}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$	6,875
12		
100		
1000		
10 000		8,998650045



Şekil 4



Şekil 5

Şekil 4 te üç dikdörtgenin alanlarının toplamı,

$(1)^2\cdot 1+(2)^2\cdot 1+(3)^2\cdot 1=1\cdot(1^2+2^2+3^2)=14\ \text{br}^2$ olur.

Şekil 5 teki altı dikdörtgenin alanlarının toplamı,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{6}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$$

$$=\frac{91}{6}$$

$$=11,375\ \text{br}^2 \text{ olur.}$$

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanlardaki işlemleri yaparak toplam alanları bulunuz.



Parça Sayısı	Alan Hesaplama	Toplam Alan
3	$\frac{3}{3}[f(1)+f(2)+f(3)]=1\cdot(1+4+9)$	14
6	$\frac{3}{6}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{4}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)\right]$	11,375
12		
100		9,13545
1000		
10 000		9,001350045

Her iki tabloya bakıldığında dikdörtgen sayısı arttıkça alt ve üst dikdörtgenlerin alanlarının toplamının 9 değerine yaklaştığı görülmektedir. Buna göre bu alanı, 9 br^2 olarak tahmin edebiliriz.

Etkinlikteki sayısal işlemler aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Alt ve üst dikdörtgenlerin alanlarının toplamını bulmak için

$[0,3]$ kapalı aralığı, $0=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=3$ olmak üzere $\forall k\in\{1,2,3,...,n\}$ için $[x_{k-1},x_k]$ biçiminde n tane kapalı alt aralığa bölünmüştür.

$\triangle x_k=x_k-x_{k-1}$, $f(x)=x^2$ ve $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ olmak üzere bu alanların toplamı

$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\triangle x_k$ biçiminde yazılabilir.

- $a, b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olsun.

$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_n=b$ şeklindeki sayıların oluşturduğu kümeye $[a,b]$ nın bir **parçalanması veya bölüntüsü** denir.

- $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$ aralıklara **alt aralık**,
- $\triangle x_k=x_k-x_{k-1}$ sayısına bu alt aralığın **uzunluğu**,
- $\forall k\in\{1,2,3,...,n\}$ için $\triangle x_k=\frac{b-a}{n}$ ise P bölüntüsüne **düzgün bölüntü** denir.

$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_{n-1}, x_n\}$ düzgün bölüntüsünde $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1}$ dir.

- $a = x_0, b = x_n$ olmak üzere $[a, b]$ eşit parçalara bölünsün. $x = a, x = b$ doğruları, x ekseni ve $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği arasında kalan alanın yaklaşık değeri,

Alt toplam, $A_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \triangle x_k$ (Alt dikdörtgenlerin alanlarının toplamı)

Üst toplam, $Ü_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \triangle x_k$ (Üst dikdörtgenlerin alanlarının toplamı)

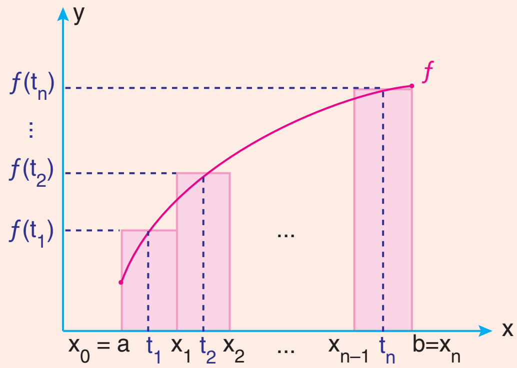
$t_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$ ve $R_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \triangle x_k$ ise $A_n < R_n < Ü_n$ eşitsizliği yazılabilir.

$[a, b]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu için alt aralıkların orta noktalarına göre yükseklikleri belirlenen dikdörtgenlerin alanlarının toplamı **Riemann orta toplamını (Riemann toplamını)** verir.

- $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ bölüntü,

- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ eşit uzunluktaki alt aralıklar,

- $t_1, t_2, ..., t_n$ bulundukları aralıkların orta noktaları,



- Aralık genişliği $\triangle x$ dikdörtgenlerin tabanları,

- $f(t_1), f(t_2), ..., f(t_n)$ dikdörtgenlerin yükseklikleri olmak üzere dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

$$f(t_1) \cdot \triangle x + f(t_2) \cdot \triangle x + ... + f(t_n) \cdot \triangle x = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x$$

f fonksiyonunun P bölüntüsüne göre Riemann toplamıdır.

$n \to \infty$ için grafiğin altında kalan alan gerçek değerine yaklaşır.

Örnek

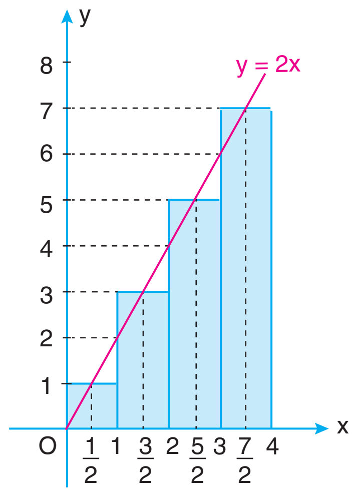
$y = 2x$, $x = 0$, $x = 4$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanını, Riemann toplamı yardımıyla bulalım.

Çözüm

$[0,4]$ nı $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ alt aralıklarına bölelim.

$f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right), f\left(\frac{7}{2}\right)$ sırasıyla dikdörtgenlerin yükseklikleri olmak üzere şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

$$1\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)+1\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)+1\cdot f\left(\frac{5}{2}\right)+1\cdot f\left(\frac{7}{2}\right) = 1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 5+1\cdot 7$$
$$= 1+3+5+7$$
$$= 16\text{ br}^2 \text{ dir.}$$

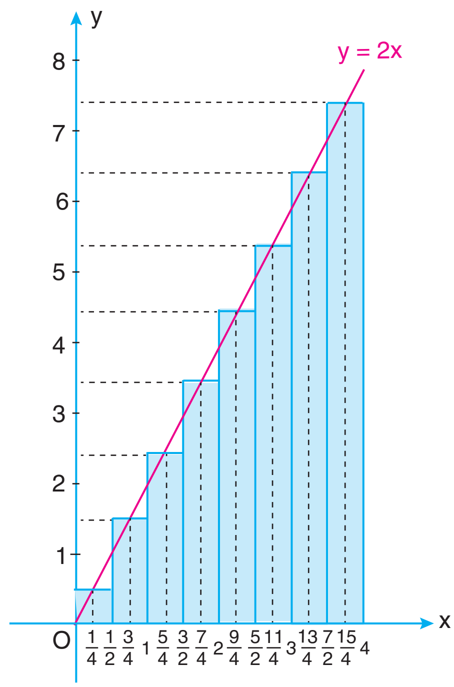


Şimdi $[0,4]$ nı, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2},2\right]$, $\left[2,\frac{5}{2}\right]$, $\left[\frac{5}{2},3\right]$, $\left[3,\frac{7}{2}\right]$, $\left[\frac{7}{2},4\right]$ alt aralıklarına bölelim.

Şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

$$\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{11}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{13}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+\frac{11}{2}+\frac{13}{2}+\frac{15}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 32 = 16\text{ br}^2\text{ dir.}$$



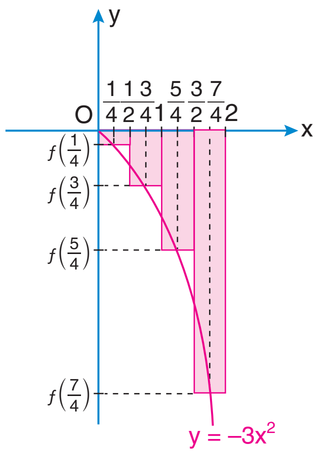
Alt aralık sayısı attıkça elde edilen dikdörtgenlerin alanlarının toplamı 16 br^2 olduğundan $y = 2x$, $x = 0$ ve $x = 4$ doğrularının arasında kalan bölgenin alanını 16 br^2 olarak tahmin edebiliriz.

Örnek

$y = -3x^2$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını Riemann toplamı yardımıyla $[0, 2]$ kapalı aralığında tahmin edelim.

Çözüm

$[0,2]$ nı $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ alt aralıklarına bölelim.



Şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

$$\left|\frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{7}{4}\right)\right|$$

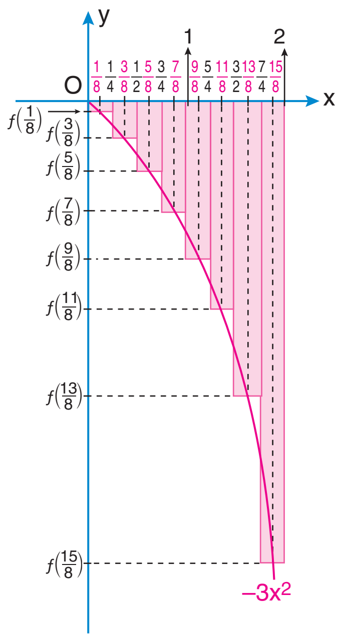
$$\frac{1}{2} \cdot \left| f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{3}{16} - \frac{27}{16} - \frac{75}{16} - \frac{147}{16}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{252}{16}\right|$$

$$= \frac{252}{32} = 7{,}875 \text{ bulunur.}$$

> Alan negatif olamayacağı için yapılan işlemin mutlak değeri alınmalıdır.



Şimdi $[0, 2]$ nı $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, $\left[1, \frac{5}{4}\right]$, $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$, $\left[\frac{7}{4}, 2\right]$ alt aralıklarına bölelim.

Şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

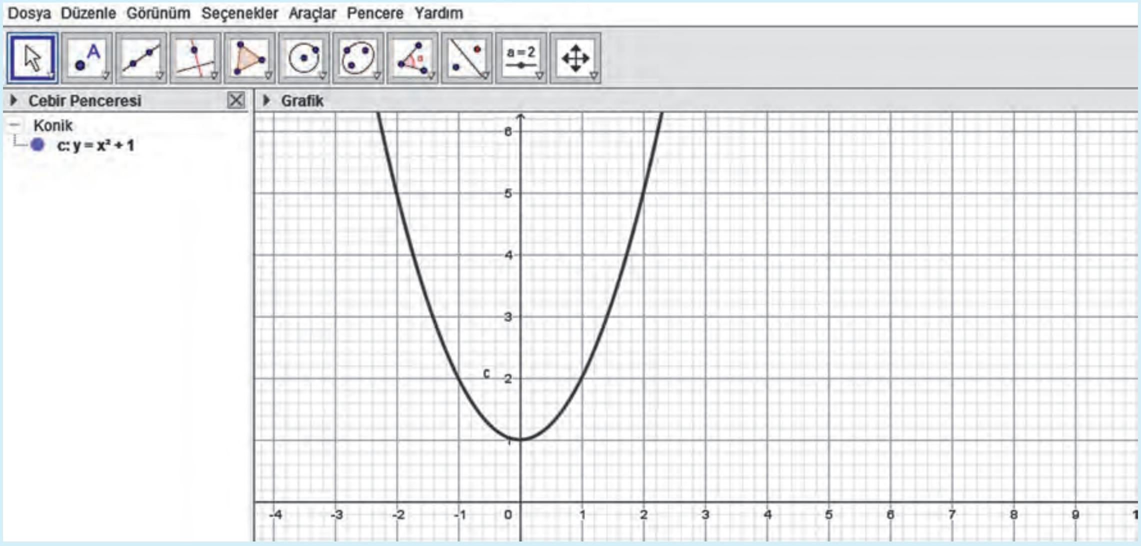
$$\left|\frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{11}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{13}{8}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{15}{8}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left| f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) + f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{11}{8}\right) + f\left(\frac{13}{8}\right) + f\left(\frac{15}{8}\right)\right|$$

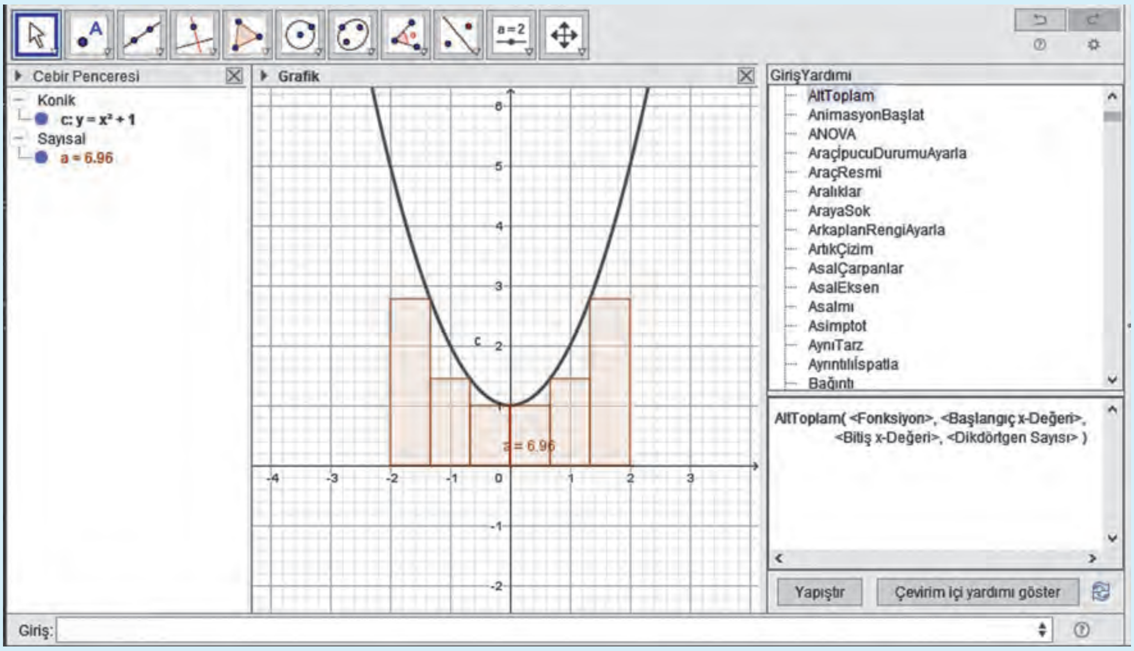
$$= \frac{1}{4} \cdot \left| -\frac{3}{64} - \frac{27}{64} - \frac{75}{64} - \frac{147}{64} - \frac{243}{64} - \frac{363}{64} - \frac{507}{64} - \frac{675}{64}\right| = \left| -\frac{2040}{256}\right| = \frac{2040}{256} = 7{,}96875 \text{ tir.}$$

Dikdörtgen sayısı arttıkça dikdörtgenlerin alanlarının toplamı 8 e yaklaşmaktadır. Dolayısıyla eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını 8 br^2 olarak tahmin edebiliriz.

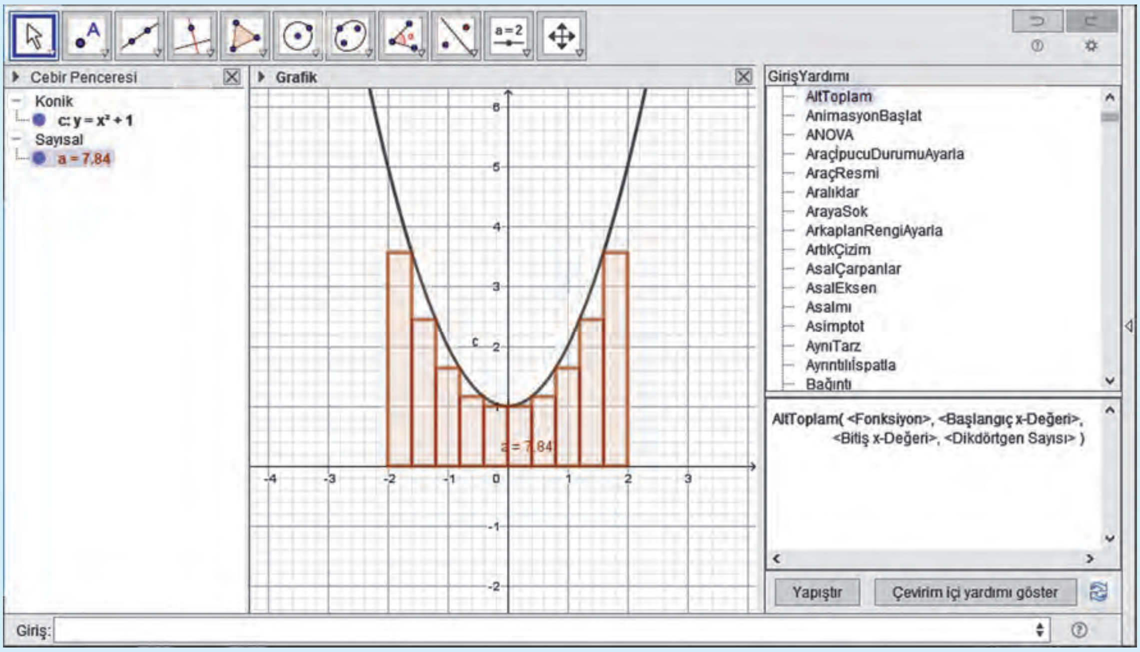
• GeoGebra programını çalıştırarak fonksiyon giriş alanına $y = x^2 + 1$ fonksiyonunu yazarak grafiğini oluşturalım.

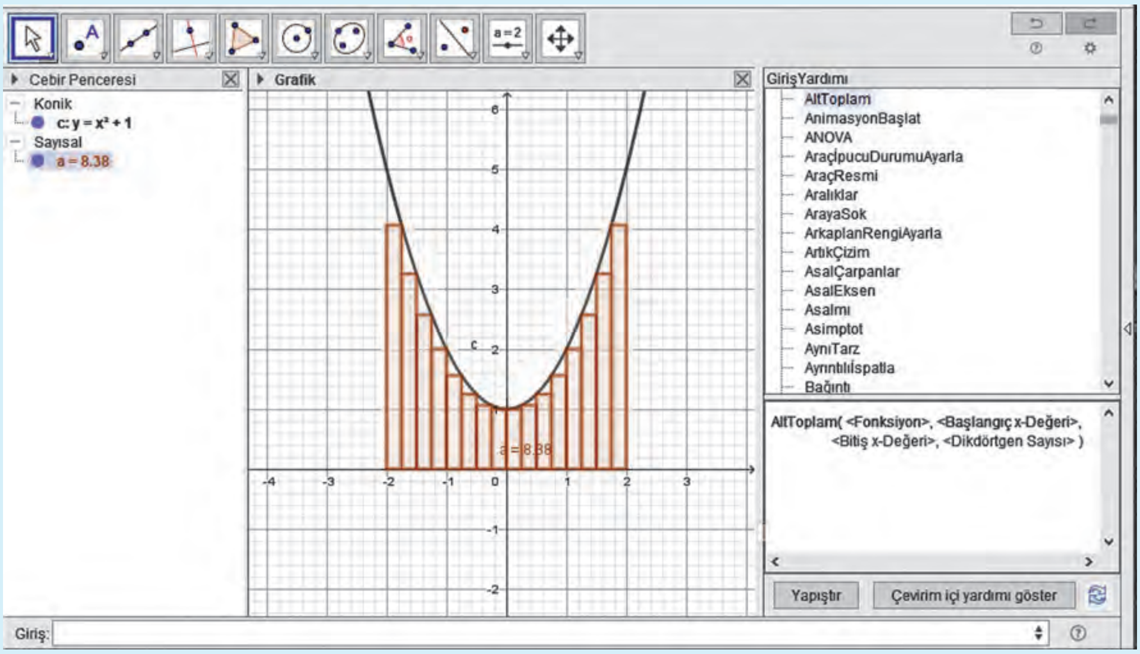


• AltToplam menüsünü seçerek açılan alana sınır değerler olarak -2 ve 2, dikdörtgen sayısına da 6 girelim.



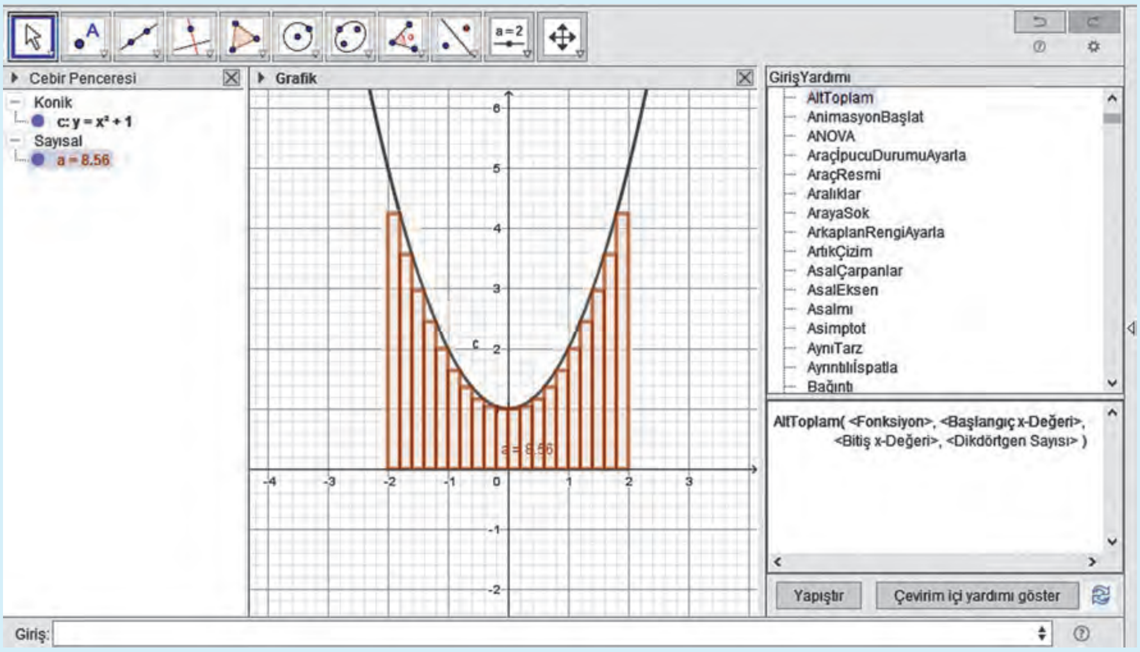
• Aynı işlemleri dikdörtgen sayısını artırarak devam edelim.

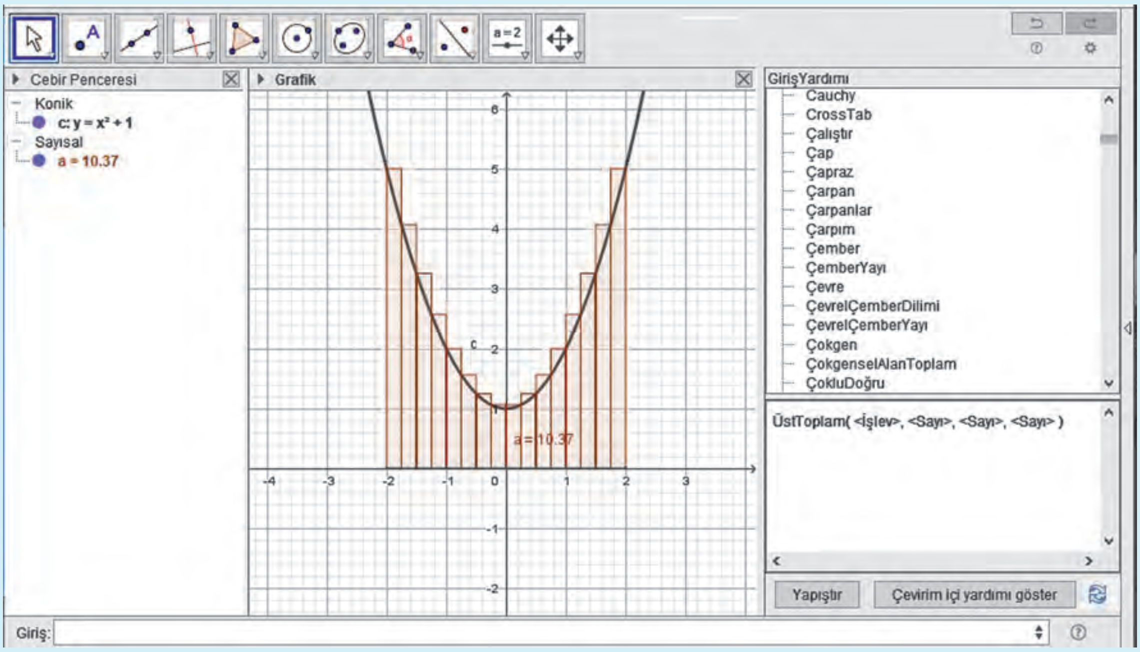




• Oluşturduğumuz bölgelerin üzerine tıkladığımızda bölgelerin alanları görünecektir.

• Dikdörtgen sayısı arttıkça oluşan bölgenin alanının hangi tam sayıya yaklaştığını açıklayınız.

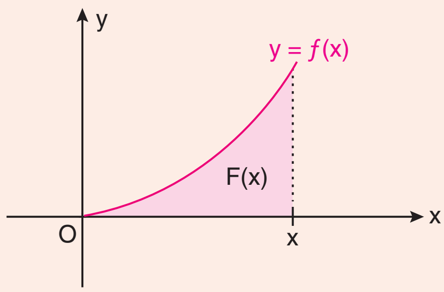




• Aynı işlemleri ÜstToplam menüsünü kullanarak yapınız. Oluşturulan bölgenin alanlarının hangi tam sayıya yaklaştığını açıklayınız.

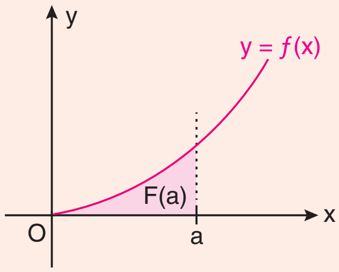
6.2.2. Bir Fonksiyonun Belirli ve Belirsiz İntegralleri Arasındaki İlişki

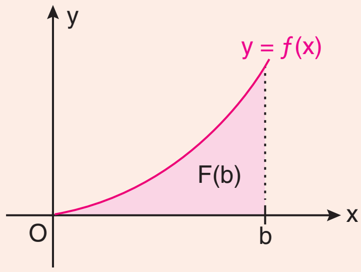
Yanda $y = f(x)$ eğrisinin altındaki boyalı alan $F(x)$ fonksiyonu ile gösterilsin. $F'(x) = f(x)$ tir.

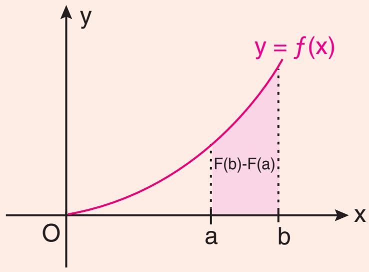


$y = f(x)$ eğrisi $x = a$ ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $F(a)$ ya eşittir.

$y = f(x)$ eğrisi, $x = b$ doğrusu ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $F(b)$ ye eşittir. $(a < b)$







$y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı $F(b) - F(a)$ ya eşittir.

Son şekildeki boyalı bölgenin alanı $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali ile gösterilir.

Buradan $\mathbf{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$ olur.

$F(b) - F(a)$ farkını göstermek için $F(x)\Big|_a^b$ sembolü kullanılır. Bu sembolü göz önüne alırsak

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır.

Burada $F(x)$, $f(x)$ in belirsiz integralidir. Belirli integral hesaplanırken belirsiz integralden faydalanılır.

Örnek

$\int_0^3 xdx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\int_0^3 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{9}{2}$ olur.

Örnek

$\int_{1}^{2} x^2 dx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\int_{1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ olur.}$$

6.2.3. Belirli İntegralin Özellikleri

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int_{a}^{b} c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_{a}^{b} f(x)dx$ tir.

Örnek

$\int_{1}^{4} 2x^2 dx$ ifadesinin değerini bulalım

Çözüm

$$\int_{1}^{4} 2x^2 dx = 2\cdot \int_{1}^{4} x^2 dx = 2\cdot\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4\right) = 2\cdot\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right)$$
$$= 2\cdot\left(\frac{64-1}{3}\right) = 2\cdot\frac{63}{3}$$
$$= 2\cdot 21 = 42 \text{ dir.}$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx$ ve

$\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} g(x)dx$ tir.

Örnek

$\int_{2}^{4}(2x-1)dx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\int_{2}^{4}(2x-1)dx = \int_{2}^{4}2xdx - \int_{2}^{4}1dx$$
$$= 2\int_{2}^{4}xdx - \int_{2}^{4}dx$$
$$= 2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{4}\right) - x\Big|_{2}^{4}$$
$$= 2\cdot\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)-(4-2)$$
$$= 2\cdot(8-2)-2$$
$$= 10$$

Aşağıdaki işlemleri yaparak tabloyu doldurunuz. Her iki sütundaki sonuçları karşılaştırınız.

$\int_{1}^{2}4xdx =$	$4\int_{1}^{2}xdx =$
$\int_{-2}^{2}3x^2dx =$	$3\int_{-2}^{2}x^2dx =$
$\int_{0}^{4}(x^2+x+1)dx =$	$\int_{0}^{4}x^2dx+\int_{0}^{4}xdx+\int_{0}^{4}dx =$
$\int_{2}^{4}(3x^2-2x+1)dx =$	$3\int_{2}^{4}x^2dx-2\int_{2}^{4}xdx+\int_{2}^{4}dx =$
$\int_{1}^{3}(-x^3+4x^2-2)dx =$	$-\int_{1}^{3}x^3dx+4\int_{1}^{3}x^2dx-2\int_{1}^{3}dx =$
$\int_{1}^{5}x^2dx =$	$\int_{1}^{3}x^2dx+\int_{3}^{5}x^2dx =$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)dx = F(x)\Big|_b^a &= F(a) - F(b)\\ &= -(F(b) - F(a))\\ &= -\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,\ b \in [a, c]$

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx = F(x)\Big|_a^c &= F(c) - F(a)\\ &= F(c) - F(b) + F(b) - F(a)\\ &= \int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\end{aligned}$$

Örnek

$\int_2^8 xdx + \int_6^9 xdx + \int_8^6 xdx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}\int_2^8 xdx + \int_6^9 xdx + \int_8^6 xdx &= \int_2^8 xdx + \int_6^9 xdx - \int_6^8 xdx\\ &= \int_2^8 xdx + \int_6^8 xdx + \int_8^9 xdx - \int_6^8 xdx\\ &= \int_2^8 xdx + \int_8^9 xdx + \underbrace{\int_6^8 xdx - \int_6^8 xdx}_{=0}\\ &= \int_2^9 xdx\\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_2^9\\ &= \frac{9^2}{2} - \frac{2^2}{2}\\ &= \frac{81-4}{2}\\ &= \frac{77}{2} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$\left(\int_8^6 xdx = -\int_6^8 xdx\right)$

$\left(\int_6^9 xdx = \int_6^8 xdx + \int_8^9 xdx\right)$

Örnek

$\int_{1}^{10} x^2\,dx + \int_{6}^{11} x^2\,dx + \int_{10}^{6} x^2\,dx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{10} x^2\,dx + \int_{6}^{11} x^2\,dx + \int_{10}^{6} x^2\,dx &= \int_{1}^{10} x^2\,dx + \int_{6}^{11} x^2\,dx - \int_{6}^{10} x^2\,dx \\
&= \int_{1}^{10} x^2\,dx + \int_{6}^{10} x^2\,dx + \int_{10}^{11} x^2\,dx - \int_{6}^{10} x^2\,dx \\
&= \int_{1}^{10} x^2\,dx + \int_{6}^{10} x^2\,dx - \int_{6}^{10} x^2\,dx + \int_{10}^{11} x^2\,dx \\
&= \int_{1}^{10} x^2\,dx + \int_{10}^{11} x^2\,dx \\
&= \int_{1}^{11} x^2\,dx \\
&= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{11} = \frac{11^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{1330}{3} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Örnek

$f(x) = \begin{cases} x-1\ , x < 1 \text{ ise} \\ -1+x^2\ , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ olduğuna göre $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası $x = 1$ dir.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x)dx &= \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx \\
&= \int_{-2}^{1} (x-1)dx + \int_{1}^{2} (-1+x^2)dx \\
&= \left.\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right|_{-2}^{1} + \left.\left(-x + \frac{x^3}{3}\right)\right|_{1}^{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{4}{2} + 2\right) + \left(-2 + \frac{8}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - 4 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - 4 + \frac{4}{3} = \frac{-3-24+8}{6} = -\frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Örnek

$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<2 \text{ ise}\\ 4x^3, & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$ olduğuna göre $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası $x=2$ dir.

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2x-1)dx+\int_{2}^{4}4x^3dx$$
$$=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-2}^{2}+4\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{2}^{4}$$
$$=(x^2-x)\Big|_{-2}^{2}+x^4\Big|_{2}^{4}=(4-2)-(4+2)+256-16=2-6+240=236 \text{ olur.}$$

UYGULAYALIM

1. $y=x$ fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını $[0,4]$ için bulunuz.

2. $y=-x^2$ fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını $[0,3]$ için bulunuz.

3. $\int_{2}^{4} x^2dx$ ifadesini Riemann toplamından yararlanarak bulunuz.

4. $\int_{0}^{4} 5xdx$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a) $\int_{2}^{4}(x^2-2x+1)dx$

b) $\int_{-2}^{2}(x^3-1)dx$

c) $\int_{-4}^{2}(3x^2-4x+1)dx$

ç) $\int_{a}^{4}x^2dx+\int_{a}^{4}3dx-\int_{a}^{4}xdx$

d) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^4}{4}+3x\right)dx$

6. $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\leq 0 \text{ ise}\\ -2x+3x^2, & x>0 \text{ ise}\end{cases}$ olduğuna göre $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

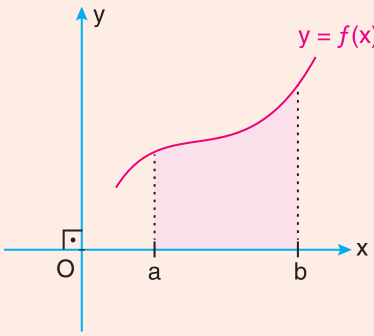
6.2.4. Belirli İntegral ile Alan Hesabı

$f:[a,b] \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu sürekli olsun.

Denklemi $y = f(x)$ olan eğriyle, $x = a,\ x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı,

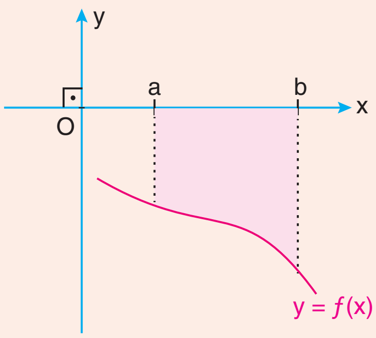
$f(x) \geq 0$ ise

$$\text{Alan} = \int_a^b f(x)dx$$



$f(x) < 0$ ise

$$\text{Alan} = -\int_a^b f(x)dx \text{ tir.}$$



Örnek

Denklemi $y = x^2$ olan eğri, $x = 1,\ x = 3$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

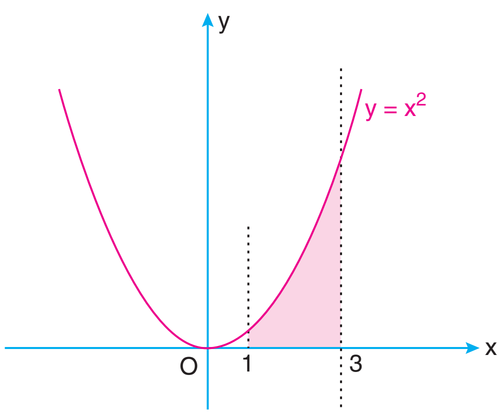
Çözüm

$$\text{Alan} = \int_1^3 x^2 dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3$$

$$= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ br}^2 \text{dir.}$$



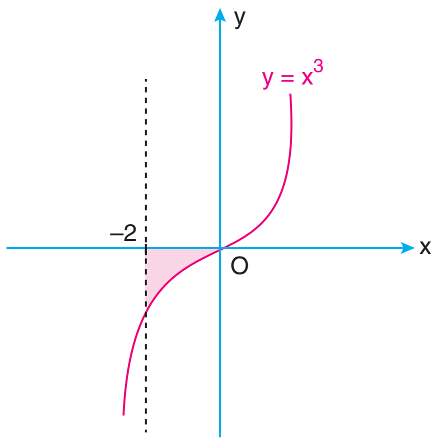
Örnek

Denklemi $y = x^3$ olan eğri, $x = -2$, $x = 0$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

İstenen bölge x ekseninin altında kalmaktadır.

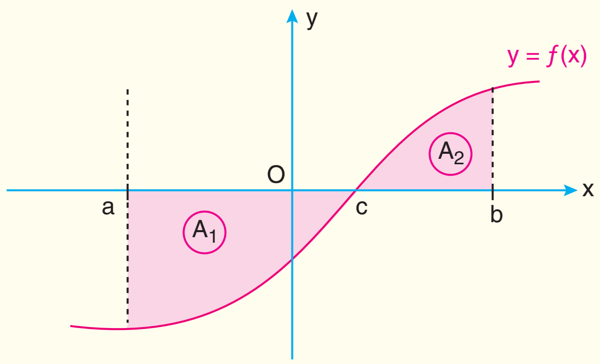
$$\text{Alan} = -\int_{-2}^{0} x^3\,dx$$
$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}$$
$$= -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right)$$
$$= \frac{16}{4}$$
$$= 4\ \text{br}^2\text{dir.}$$



$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ nın bazı alt aralıklarında negatif veya pozitif değerler alıyorsa fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı bulunarak bu alanlar toplanır.

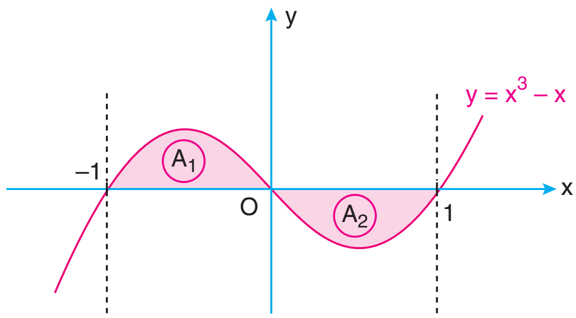
Aşağıdaki şekle göre

$$\text{Alan} = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx \ \text{ tir.}$$



Örnek

Yanda $y = f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = x^3 - x$ eğrisi, $x = -1$, $x = 1$ doğruları ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulalım.



Çözüm

İstenilen bölgenin alanı $A = A_1 + A_2$ dir.

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \left(-\int_{0}^{1} f(x)dx\right)$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{br}^2 \text{ olur.}$$

Örnek

$f(x) = x^2 - 2x$ parabolü, $x = 1$ ve $x = 4$ doğruları ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

$$\text{Alan} = \int_{1}^{4} |f(x)|dx = \int_{1}^{4} |x^2 - 2x|dx$$

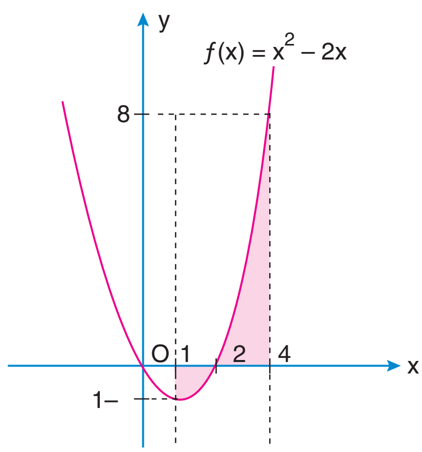
$$= \int_{1}^{2} |x^2 - 2x|dx + \int_{2}^{4} |x^2 - 2x|dx$$

$$= \int_{1}^{2} (-x^2 + 2x)dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 2x)dx$$

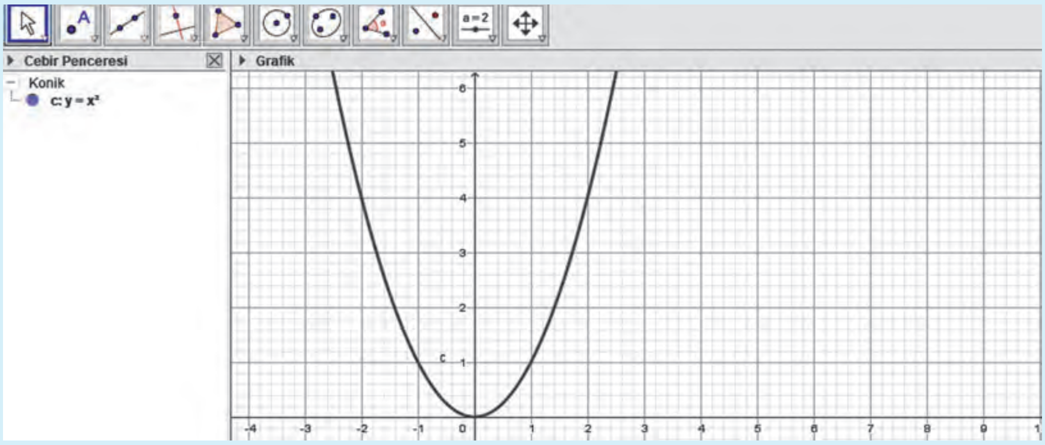
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} + \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{4}$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$

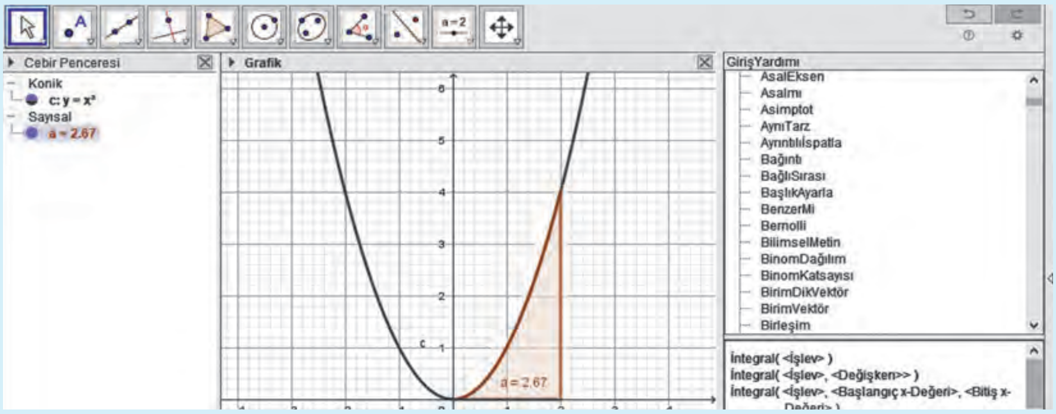
$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{49}{3} - 9 = \frac{22}{3}\ \text{br}^2 \text{ olur.}$$



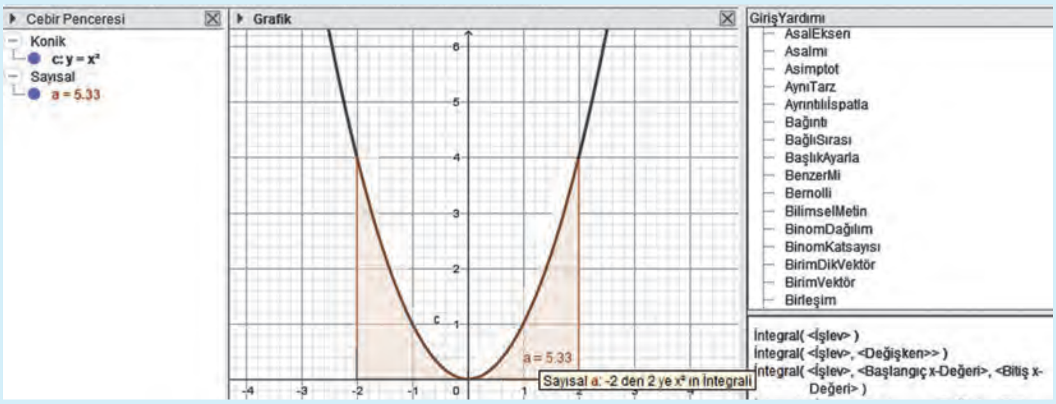
• GeoGebra programını açarak $y = x^2$ grafiğini oluşturalım.



• İşlev penceresinden İntegral menüsünü seçelim.



• Açılan pencereye fonksiyonu ve sınır değerler olan -2 ile 2 yi girelim.

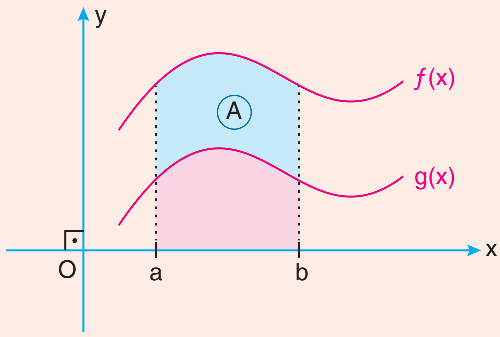


• x ekseni, $y = x^2$ parabolü, $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan alanı bulmuş oluruz.

$[a,b]$ nda $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere; $y = f(x)$, $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanı,

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \text{ tir}$$



Örnek

$y = x^2$ ve $x = y^2$ fonksiyonlarının grafiklerinin sınırladığı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$ tir. $y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ denklemlerinin ortak çözümünü yaparak grafikleri kesen düşey doğruları bulalım.

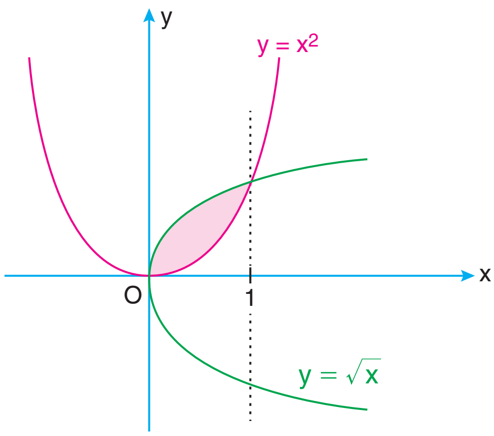
$y = x^2$ ve $x = y^2 \Rightarrow x = (x^2)^2$

$x = x^4 \Rightarrow x - x^4 = 0$

$x \cdot (1 - x^3) = 0$

$x = 0,\ x = 1$ dir.

Buna göre grafikleri kesen düşey doğrular $x = 0$ ve $x = 1$ doğrularıdır.



$$\text{Alan} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

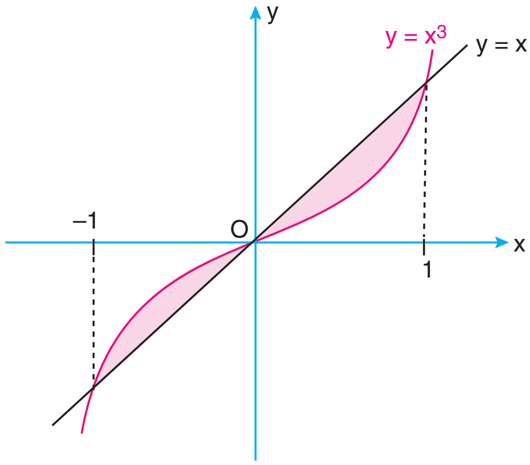
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{3} \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

Örnek

$y = x$ doğrusu ile $y = x^3$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

$y = x^3$ ve $y = x$ denklemlerinin ortak çözümünü yaparak grafikleri kesen düşey doğruları bulalım.



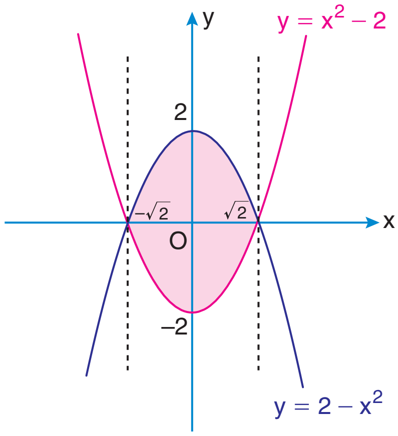
$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$$
$$x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \text{ dir.}$$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$= 0 - 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0)$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{br}^2 \text{ olur.}$$

Örnek

$y = x^2 - 2$ ve $y = 2 - x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

Çözüm

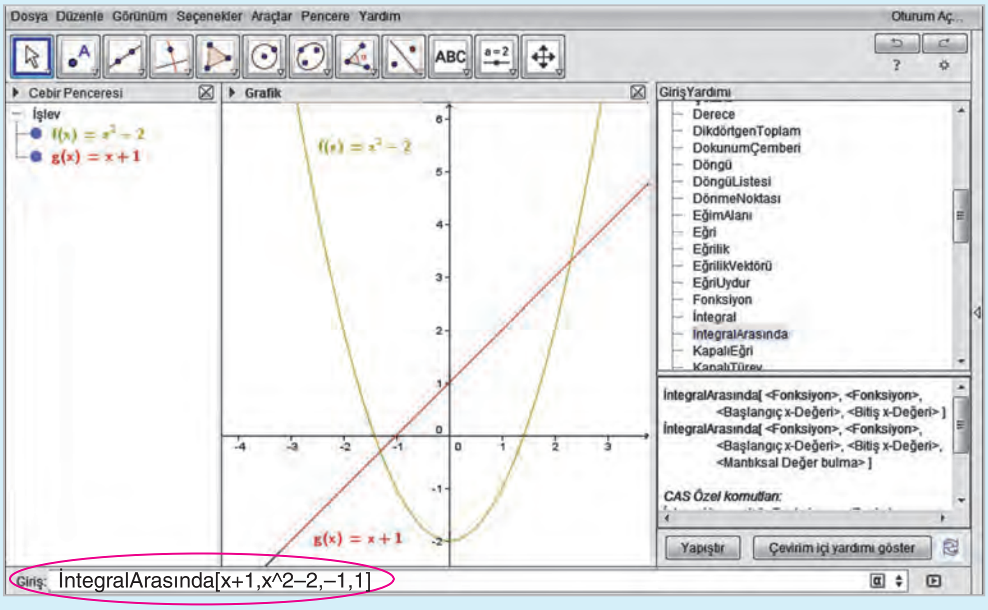


$$x^2 - 2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \mp\sqrt{2} \text{ olur.}$$

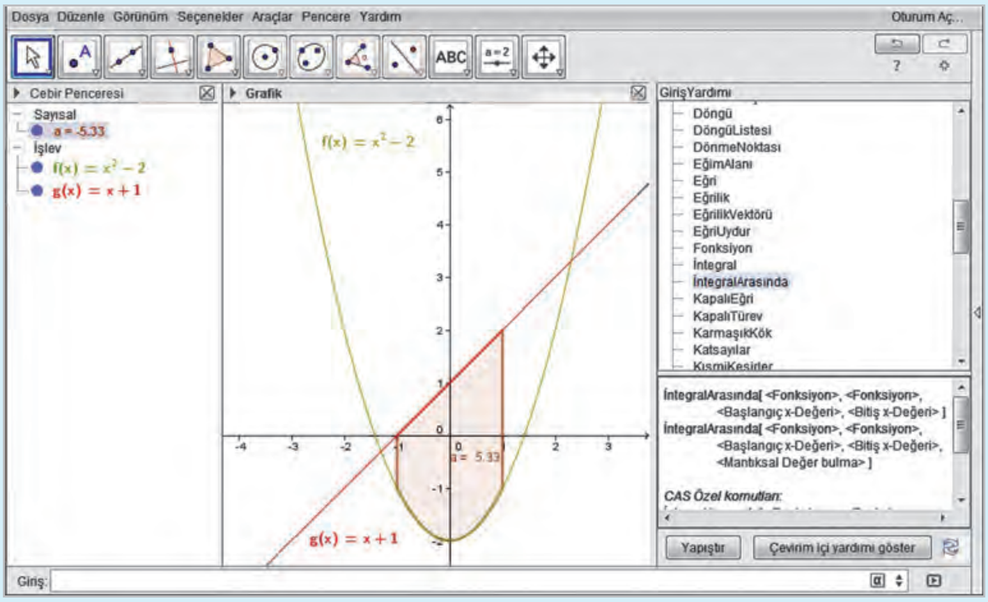
$$\text{Alan} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(2 - x^2) - (x^2 - 2)]dx$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)dx$$
$$= \left(4x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$
$$= \left(4\sqrt{2} - \frac{2(\sqrt{2})^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-\sqrt{2}) - \frac{2 \cdot (-\sqrt{2})^3}{3}\right)$$
$$= 4\sqrt{2} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 + 4\sqrt{2} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 = 8\sqrt{2} - \frac{4}{3}(\sqrt{2})^3$$
$$= 8\sqrt{2} - \frac{4}{3}2\sqrt{2} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{3} = \frac{16}{3}\sqrt{2}\,\text{br}^2 \text{ olur.}$$

$x = -1$ doğrusu, $x = 1$ doğrusu, $f(x) = x^2 - 2$ ve $g(x) = x + 1$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan bölgenin alanını bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak bulalım.

• GeoGebra programında giriş menüsünden yararlanarak $f(x) = x^2 - 2$ ve $g(x) = x + 1$ fonksiyonlarının grafiklerini oluşturalım.



• **İntegralArasında** komutu yardımıyla açılan ifadede parantez içerisine **x+1, x^2–2, –1,1** yazalım.



• Alan $= \int_{-1}^{1} \left| x + 1 - x^2 + 2 \right| dx = 5,33 \text{ br}^2$ elde edilir.

V: hız, t: zaman, a: ivme, X: alınan yolu göstersin.

Hızı V olan bir hareketlinin $[t_1, t_2]$ nda aldığı yol, $X = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|dt$,

a ivmesi ile hareket eden bir cismin $[t_1, t_2]$ nda hızı, $V(t_2) - V(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$ dir.

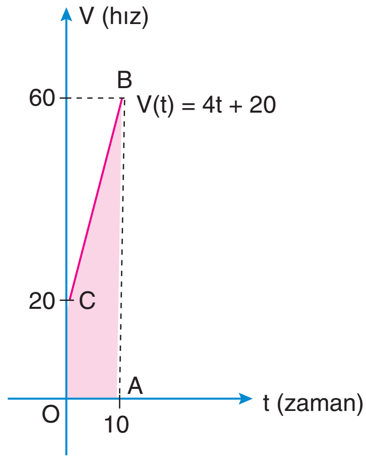
Örnek

Bir cismin zamana bağlı hız fonksiyonu $V(t) = 4t + 20$ m/sn. dir. Bu cismin $t \in [0, 10]$ nda aldığı yolu bulalım.

Çözüm

1. yol

$$X(yol) = \int_0^{10} (4t + 20)dt$$
$$= \left(\frac{4t^2}{2} + 20t\right)\Bigg|_0^{10}$$
$$= (2t^2 + 20t)\Big|_0^{10}$$
$$= (200 + 200) - (0 + 0)$$
$$= 400 \text{ m dir.}$$



2. yol

Hız-zaman grafiğinde verilen belirli bir zaman aralığında grafiğin altında kalan bölgenin alanı, alınan yola eşittir.

$$A(OABC) = \frac{|AB| + |AC|}{2} \cdot |OA| = \frac{(60 + 20)}{2} \cdot 10 = 80 \cdot 5 = 400 \text{ m dir.}$$

Örnek

Bir cismin zamana bağlı hız fonksiyonu $V(t) = 3t^2 - 10$ m/sn. dir. Bu cismin $t \in [0, 5]$ nda aldığı yolu bulalım.

Çözüm

$$X = \int_0^5 (3t^2 - 10)dt = \left(3\frac{t^3}{3} - 10t\right)\Bigg|_0^5 = (t^3 - 10t)\Big|_0^5 = (5^3 - 10 \cdot 5) - (0^3 - 10 \cdot 0)$$
$$= 125 - 50 - 0 = 75 \text{ m dir}$$

Örnek

Doğrusal olarak hareket eden bir cismin hız fonksiyonu $V(t) = t^2 - t$ m/sn. olarak verildiğine göre cismin $t_1 = 2$ ve $t_2 = 4$ saniye aralığında aldığı yolu bulalım.

Çözüm

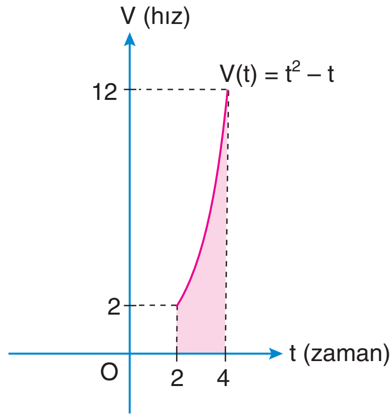
$$X = \int_2^4 (t^2 - t)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{16}{2} - \frac{8}{3} + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{12}{2}$$

$$= \frac{38}{3} \text{ m dir.}$$



Örnek

Bir matbaanın kitap basma hızı $V(t) = 10\,000 + 2000t$ (adet/ay) fonksiyonu ile belirtilmiştir. Bu matbaanın $t_1 = 1$ ve $t_2 = 4$ aylar arasında basacağı toplam kitap sayısını bulalım.

Çözüm

X toplam basım, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 4$ olmak üzere

$$X = \int_1^4 (10\,000 + 2000t)dt$$

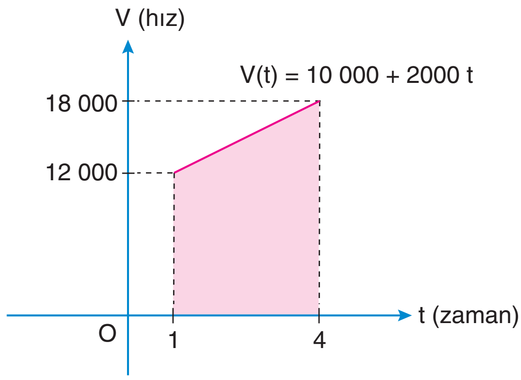
$$= \left(10\,000t + 2000\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^4$$

$$= (10\,000t + 1000\,t^2)\Big|_1^4$$

$$= (40\,000 + 16\,000) - (10\,000 + 1000)$$

$$= 56\,000 - 11\,000$$

$$= 45\,000 \text{ adettir.}$$



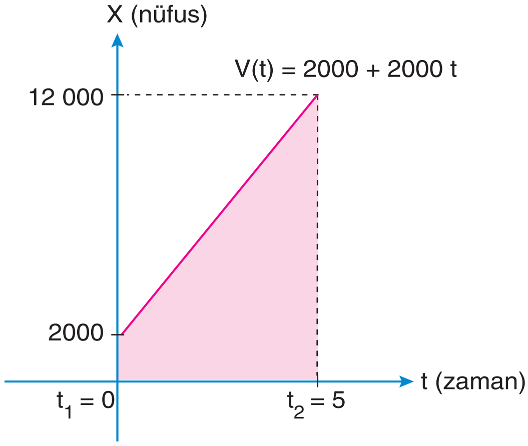
Örnek

2015 yılında nüfusu 200 000 olan bir ilin bu yıldan itibaren nüfusunun ortalama artış hızı, $V(t) = 2000 + 2000t$ (kişi / yıl) fonksiyonu ile belirtilmektedir. Bu ilin 2020 yılının başında sahip olabileceği nüfusu bulalım.

Çözüm

2015 yılı $t_1 = 0$ ise 2020 yılı $t_2 = 5$ olur. Bu ilin 2015 yılında nüfusu 200 000 olduğuna göre 2020 yılının başında nüfus,

$$X = 200\,000 + \int_0^5 (2000 + 2000t)dt$$
$$= 200\,000 + \left(2000t + 2000\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^5$$
$$= 200\,000 + 10\,000 + 25\,000 - 0$$
$$= 235\,000 \text{ kişi olur.}$$



Örnek

İvme fonksiyonu $a(t) = t^2 - t$ m/sn^2 olan bir hareketlinin $t_0 = 0$ anındaki hızı $V_0 = 10$ m/sn. dir. $t_0 = 0$ sn. anından $t_1 = 4$ sn. anına kadar alınan toplam yolu bulalım.

Çözüm

$V(t) = \int a(t)dt = \int (t^2 - t)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C$ dir.

$t_0 = 0$ için $V_0 = 10$ m/sn. olduğundan

$10 = 0 - 0 + C \Rightarrow C = 10$ olur.

$$V(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 10 \text{ ise } X(yol) = \int_0^4 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 10\right)dt$$
$$= \left(\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{6} + 10t\right)\Big|_0^4$$
$$= \left(\frac{256}{12} - \frac{64}{6} + 40\right) - 0$$
$$= \frac{608}{12} \approx 50{,}7 \text{ m olur.}$$

UYGULAYALIM

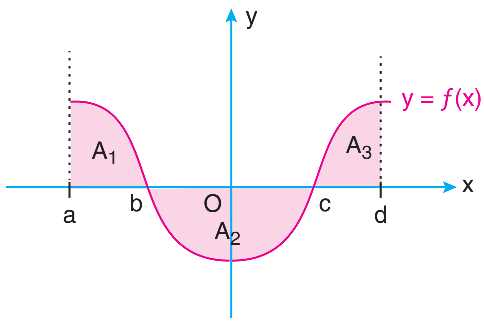
1. $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

2. $y = x^2$ parabolü, $x = 1$, $x = 3$ doğruları ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

3. $f(x) = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonunun grafiği, $x = 0$, $x = 1$ doğruları ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

4. $[0,1]$ nda, $y = x^3$ ve $y = x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

5. Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $A_1 = 4\,br^2$, $A_2 = 8\,br^2$ ve $A_3 = 6\,br^2$ olduğuna göre



a) $\int_a^b f(x)dx$ değerini bulunuz.

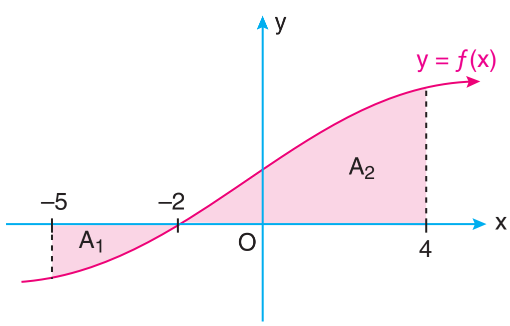
b) $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$, $x = d$ doğruları ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

6. $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun grafiği, $x = -1$, $x = 1$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

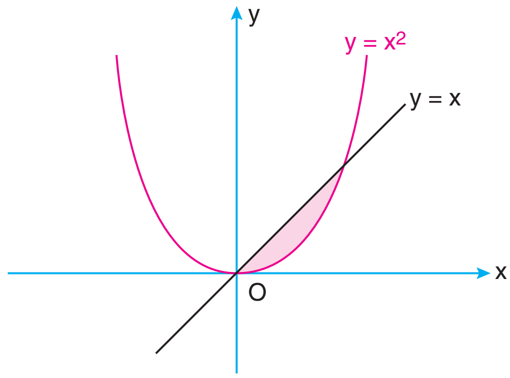
7. $y = x^2$ parabolü, $x = -2$, $x = 2$ doğruları ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

8. Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. A_1 ve A_2 nin bulundukları bölgelerin alanları gösterilmiştir.

$\int_{-5}^{4} f(x)dx = 24$ ve $A_1 = 8\,br^2$ olduğuna göre A_2 kaç br^2 dir?



9. $y = x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusunun sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



10. $y = x^2$ parabolü ile $y = 2 - x$ doğrusunun sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

11. Doğrusal olarak hareket eden bir cismin zamana bağlı hız fonksiyonu, $V(t) = 2t^2 - t$ m/sn. olduğuna göre bu cismin $t_1 = 2$ ve $t_2 = 4$ saniye arasındaki aldığı yol kaç metredir?

12. Herhangi bir t anındaki hızı, $V(t) = 3t^2 + 4t$ m/sn. olan bir cismin harekete başladığı andan itibaren 4 saniyede aldığı yol kaç metredir?

13. $f(t)$, bir un fabrikasının üretime başladığı andan t ay sonra üretilen un miktarını göstermektedir. Bu fabrikanın ilk 6 aydaki üretim hızı $f'(t) = 48 + 4t$ (un/ay) ile belirtilmiştir. Üretimin $f'(t)$ hızıyla devam ettiğini düşünerek fabrikanın sonraki 6 ay boyunca ürettiği un miktarını bulunuz.

14. Doğrusal olarak hareket eden bir cismin hızı, $V(t) = 4t + 60$ m/sn. dir. Bu cismin $[0, 8]$ nda aldığı yolu bulunuz.

15. 2014 yılında nüfusu 80 000 olan bir ilin bu yıldan itibaren nüfusundaki değişim hızı $V(t) = 500 + 500t$ (kişi/yıl) fonksiyonu ile belirtilmiştir. Bu değişim hızına göre 2024 yılının başında nüfusu kaç olur?

16. Bir araba fabrikasının açılışından itibaren ilk 4 aydaki üretim hızının zamana bağlı değişimi, $f'(t) = 240 + 200t$ (adet/ay) fonksiyonu ile belirtilmiştir. Üretimin $f'(t)$ hızıyla devam ettiğini düşünürsek sonraki 4 ay boyunca üretilen araba sayısını bulunuz.

6. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{8}{3}$ E) 3

2. $\int_{1}^{3}(3x+1)\,dx$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -12 B) -6 C) 0 D) 6 E) 14

3. $\int (x^2-2x+1)^4\cdot(2x-2)\,dx$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

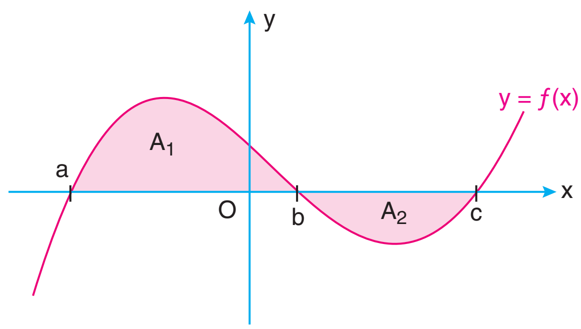
A) $\frac{x^2-2x+1}{5}+C$ B) $\frac{(x^2-2x+1)^3}{3}+C$ C) $(x^2-2x+1)^5+C$

D) $\frac{(x^2-2x+1)^5}{5}+C$ E) $\frac{(x^2-2x+1)^4}{4}+C$

4. Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

A_1 ve A_2 bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.

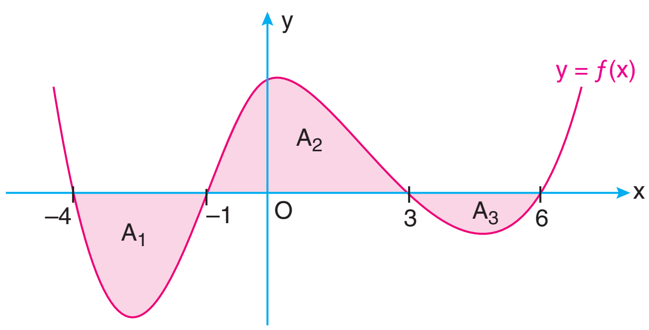
$A_1 = 12\,br^2$ ve $A_2 = 4\,br^2$ olduğuna göre $\int_{a}^{c} f(x)\,dx$ kaçtır?



A) 11 B) 8 C) 4 D) -4 E) -8

5. Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. A_1, A_2 ve A_3 bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.

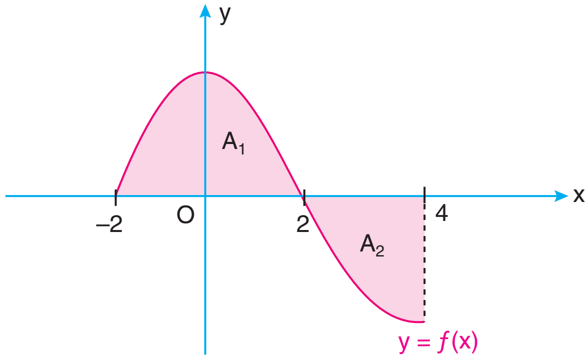
$A_1 = 6\,br^2$, $A_2 = 9\,br^2$ ve $A_3 = 4\,br^2$ olduğuna göre $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$ kaçtır?



A) -1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

6. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. A_1 ve A_2 bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.

$\int_{-2}^{4} f(x)dx = 2$ ve $A_2 = 4\ br^2$ olduğuna göre A_1 kaç br^2 dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

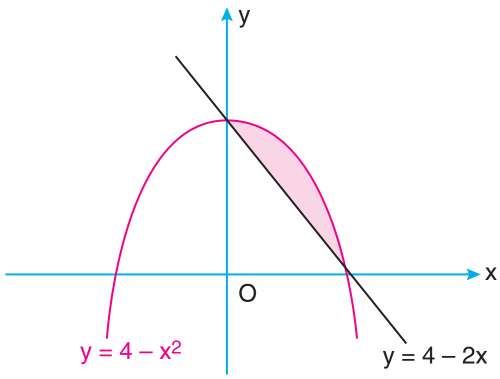
7. $y = x^3 - x$ eğrisi ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

8. $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun grafiği, $x = 2$ doğrusu ve x ekseninin arasında kalan alan kaç br^2 dir?

A) $\frac{23}{4}$ B) $\frac{25}{4}$ C) $\frac{27}{4}$ D) $\frac{29}{4}$ E) $\frac{15}{2}$

9. $y = 4 - x^2$ eğrisi ile $y = 4 - 2x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) $\frac{4}{3}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

10. $y = x^2$ ile $y = 4 - x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $\frac{10}{3}\sqrt{2}$ D) $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ E) $\frac{20}{3}\sqrt{2}$

11. $y = 2x$ doğrusu ile $y = 4x^3$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

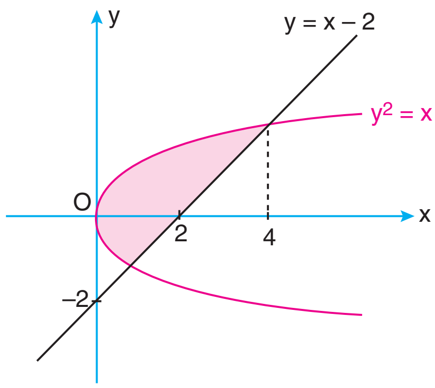
12. $y = 3x$ doğrusu ile $y = x^3$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{9}{4}$

13. $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 2x - x^2$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

14. Yandaki şekle göre boyalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{11}{2}$

D) 7 E) 8

15. Doğrusal olarak hareket eden bir cismin hız fonksiyonu, $V(t) = (t^2 - t)$ m/sn. olduğuna göre bu cismin $t_1 = 0$ sn. ve $t_2 = 3$ sn. anları arasında aldığı toplam yol kaç metredir?

A) 1 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

16. Doğrusal olarak hareket eden bir cismin t anındaki hızı, $V(t) = (t^2 + 2t)$ m/sn. dir. Bu cismin harekete başladığı andan itibaren 3 saniyede aldığı yol kaç metredir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

17. Bir otomobil fabrikasının ilk 4 aylık üretim hızı, $V(t) = (100 + 2t)$ (adet / ay) olarak belirlenmiştir. Fabrikanın açılışından itibaren ilk 4 ay içerisinde üretilen toplam otomobil sayısı kaçtır?

A) 400 B) 416 C) 432 D) 480 E) 520

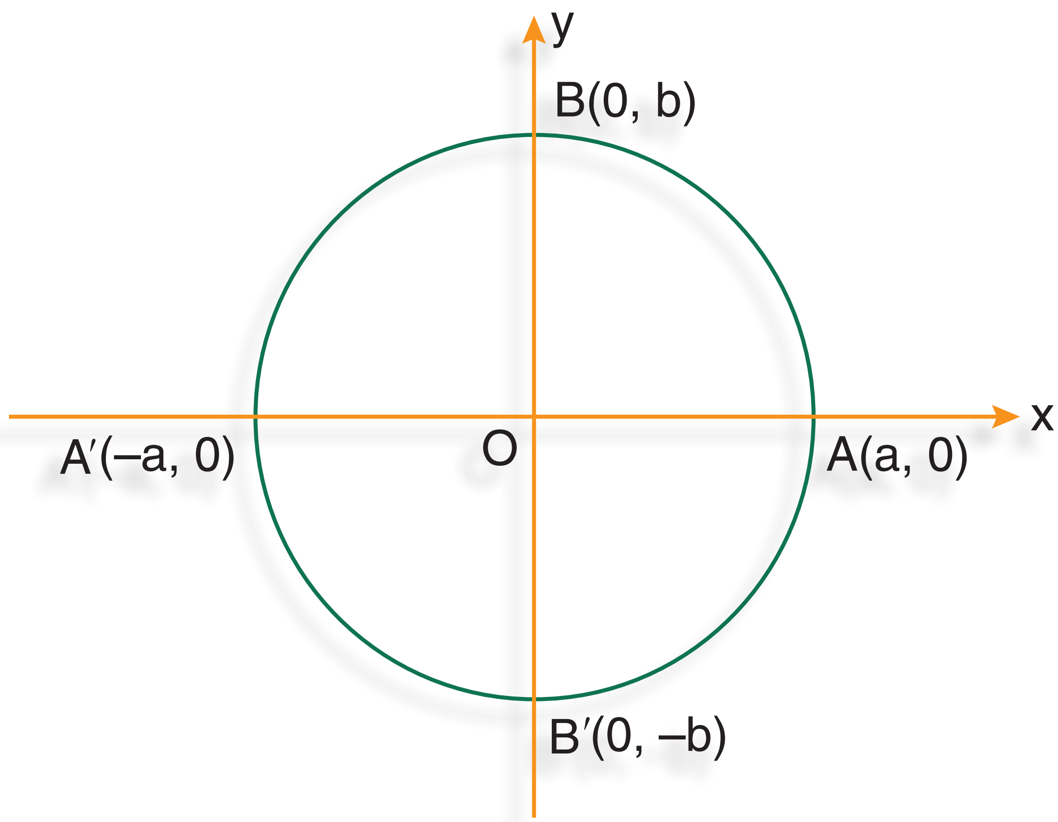
GEOMETRİ

ANALİTİK GEOMETRİ

7. ÜNİTE

7. ANALİTİK GEOMETRİ

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

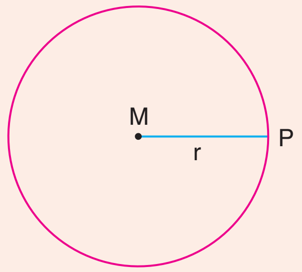


7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

7.1.1. Merkezi ve Yarıçapı Verilen Çemberin Denklemi

Düzlemde verilen bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir.

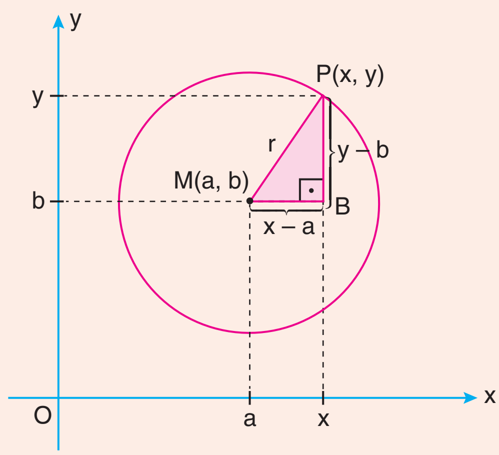
Verilen noktaya çemberin **merkezi,** çember üzerindeki bir noktanın çemberin merkezine olan uzaklığına **çemberin yarıçapı** denir. Çemberin yarıçapı r ile gösterilir.



Şekildeki $M(a, b)$ merkezli ve r yarıçaplı çemberde,

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dir. (Pisagor teoremi)

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ denklemine **çemberin standart denklemi** denir.



Örnek

Merkezi $M(1, 3)$ ve yarıçapı $r = 2$ br olan çemberin standart denklemini oluşturalım.

Çözüm

$M(1, 3)$, $r = 2$ br
(↓ a, ↓ b)

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=2^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$ olur.

Aşağıdaki tabloda bazı çemberlerin merkezleri ve yarıçap uzunlukları verilmiştir. Buna göre tabloda boş bırakılan alanları örnekteki gibi doldurunuz.

Merkez	Yarıçap Uzunluğu	Standart Denklemi
$M(a, b)$	r	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
$M(2, 3)$	2 br	
$M(-1, 4)$	3 br	
$M(-2, 2)$	4 br	
$M(0, 4)$	1 br	
$M(0, 0)$	2 br	

Örnek

Standart denklemi, $(x-2)^2+(y+3)^2=3$ olan çemberin merkezini ve yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

$$(x-2)^2+(y+3)^2=3 \Rightarrow (x-2)^2+(y-(-3))^2=(\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow a=2,\ b=-3 \text{ ve } r=\sqrt{3} \text{ br dir.}$$

Buna göre çemberin merkezi $M(2,-3)$, yarıçapının uzunluğu $r=\sqrt{3}$ br dir.

Örnek

Merkezi orijin ve yarıçapının uzunluğu 1 br olan çemberin standart denklemini oluşturalım.

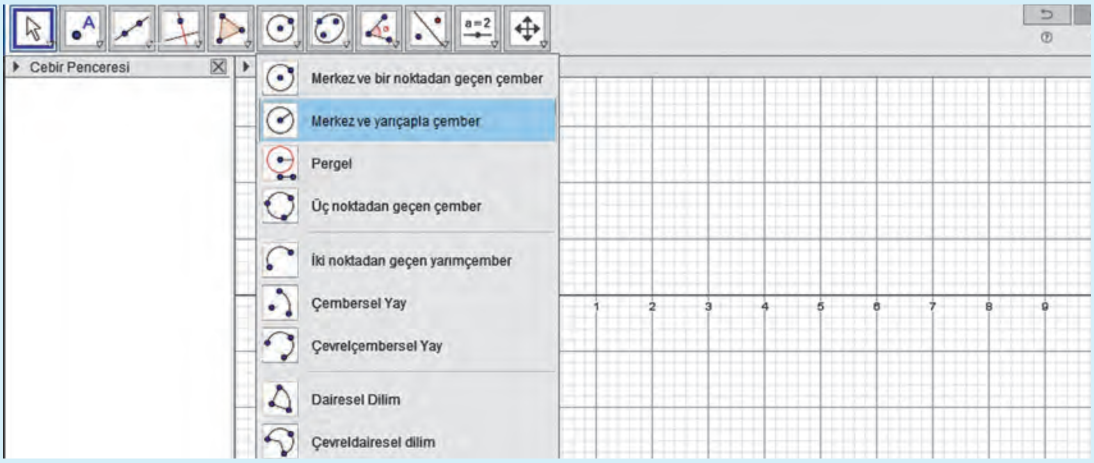
Çözüm

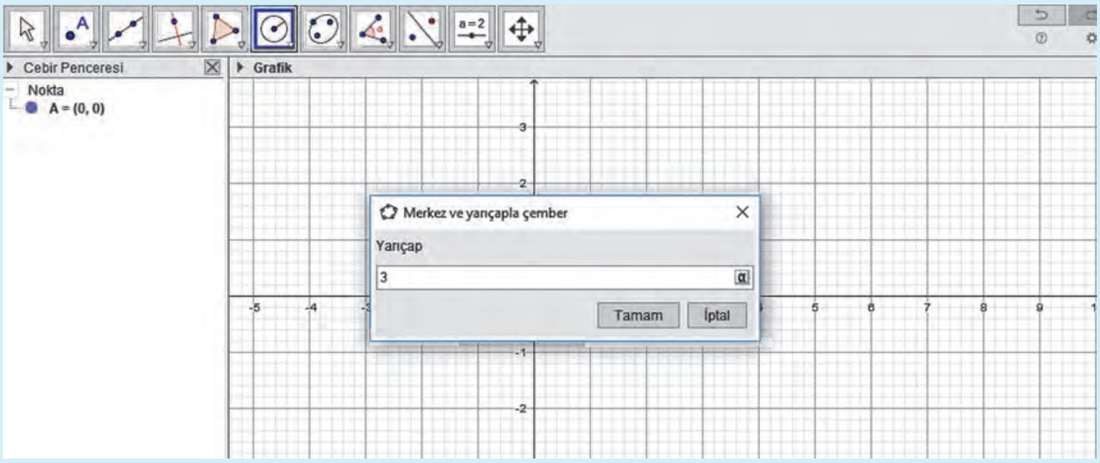
Çemberin merkezi $M(0, 0)$ ve $r = 1$br ise

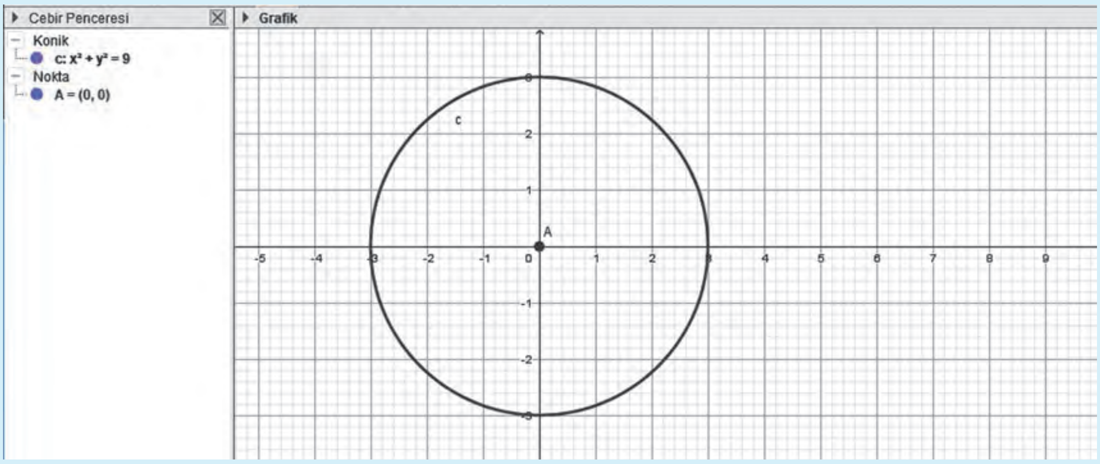
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=1^2$$

$$x^2+y^2=1 \text{ dir.}$$

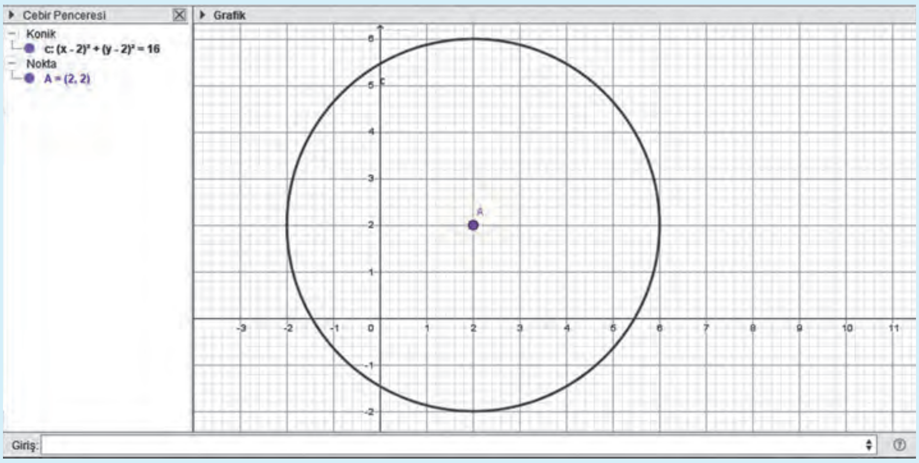
• GeoGebra programını çalıştıralım. Şekildeki menüyü kullanarak merkezi ve yarıçapı verilen bir çember oluşturalım.



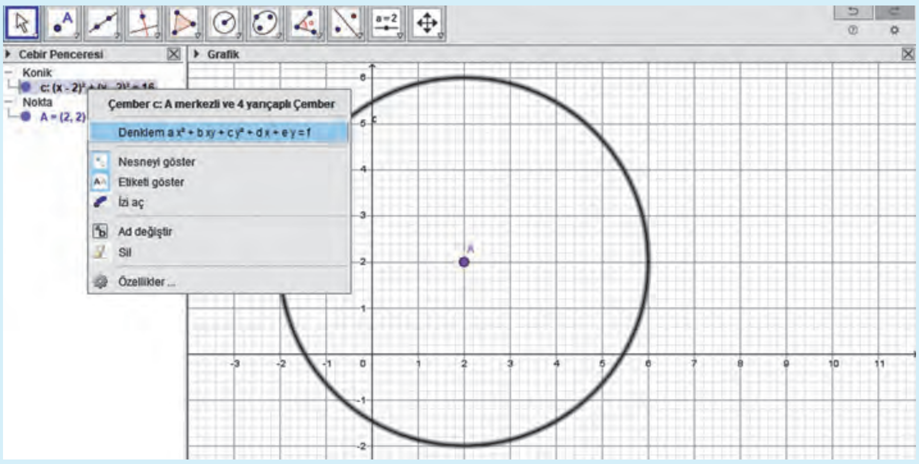


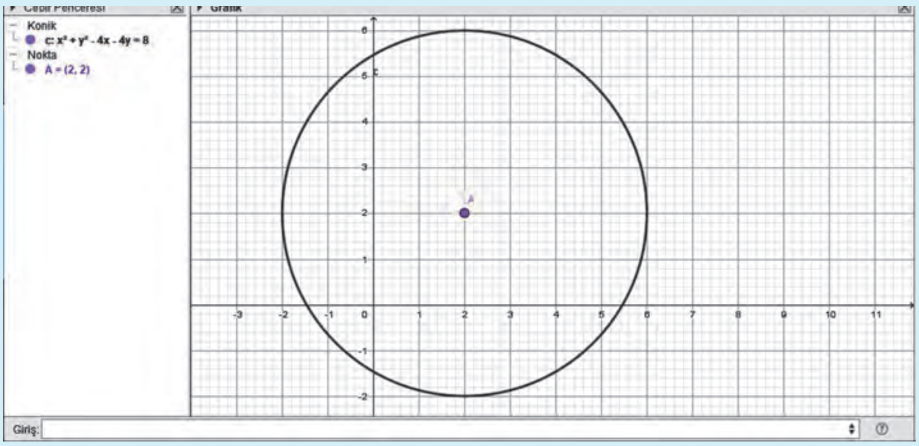


• Farklı merkez ve yarıçap uzunluğu seçilerek farklı çemberler oluşturabiliriz.



• Çemberin üzerine imleci getirip sağ tıklayalım. Açılan menüyü kullanarak oluşturduğumuz çemberin denklemini elde edelim.





$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ denkleminde,

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ yazılabilir.

Buna göre $-2a=D$, $-2b=E$, $a^2+b^2-r^2=F$ olarak alınırsa

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ denklemi elde edilir. Bu denkleme **çemberin genel denklemi** denir.

Örnek

$M(2,4)$ merkezli ve $r=2$ br yarıçaplı çemberin genel denklemini oluşturalım.

Çözüm

1. Yol

Önce çemberin standart denklemini oluşturalım.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=2^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=4$ olur.

Şimdi $(x-2)^2+(y-4)^2=4$ denklemini açarak çemberin genel denklemini oluşturalım.

$(x-2)^2+(y-4)^2=4 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16=4$

$x^2+y^2-4x-8y+16=0$ elde edilir.

2. Yol

$M(2,4) \Rightarrow a=2$ ve $b=4$ tür.

Çemberin genel denklemi, $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow -2a=D$, $-2b=E$, $a^2+b^2-r^2=F$ olduğundan

$D=-2\cdot 2=-4$

$E=-2\cdot 4=-8$

$F=2^2+4^2-2^2=16$ dır.

Bu değerleri denklemde yerlerine yazarsak

$x^2+y^2-4x-8y+16=0$ genel denklemi elde edilir.

Örnek

Genel denklemi, $x^2+y^2-4x+4y-9=0$ olan çemberin merkezini ve yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

1. Yol

Verilen denklemi, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ biçiminde yazalım.

$x^2+y^2-4x+4y-9=0$

$x^2-4x+4-4+y^2+4y+4-4-9=0$

$(x-2)^2-4+(y+2)^2-4-9=0$

$(x-2)^2+(y+2)^2-17=0$

$(x-2)^2+(y-(-2))^2=(\sqrt{17})^2 \Rightarrow a=2,\ b=-2$ ve $r=\sqrt{17}$ br dir.

Buna göre çemberin merkezi $M(2,-2)$ ve yarıçapının uzunluğu $r=\sqrt{17}$ br olur.

2. Yol

$x^2+y^2-4x+4y-9=0 \Rightarrow D=-4,\ E=4$ ve $F=-9$ dur.

$D=-2a \Rightarrow -4=-2a \Rightarrow a=2$

$E=-2b \Rightarrow 4=-2b \Rightarrow b=-2$

$F=a^2+b^2-r^2 \Rightarrow -9=2^2+(-2)^2-r^2 \Rightarrow -9=4+4-r^2 \Rightarrow r^2=17$

$\Rightarrow r=\sqrt{17}$ br olur.

Buna göre çemberin merkezi, $M(2,-2)$ ve yarıçapının uzunluğu $r=\sqrt{17}$ br dir.

Örnek

Genel denklemi, $x^2+y^2+4x=0$ olan çemberin merkezini ve yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

$x^2+y^2+4x=0 \Rightarrow x^2+4x+y^2=0$

$x^2+4x+4-4+y^2=0 \Rightarrow (x+2)^2+y^2-4=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-0)^2=2^2$ olur.

Buna göre çemberin merkezi $M(-2,0)$, yarıçapının uzunluğu $r=2$ br olur.

Örnek

Genel denklemi, $x^2+y^2-2x+3y-5=0$ olan çemberin standart denklemini oluşturalım.

Çözüm

$x^2+y^2-2x+3y-5=0$ denkleminde,

$$D=-2a \Rightarrow -2=-2a$$

$$a=1$$

$$E=-2b \Rightarrow 3=-2b$$

$$b=-\frac{3}{2}$$

$$F=a^2+b^2-r^2 \Rightarrow -5=1^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-r^2$$

$$-5=1+\frac{9}{4}-r^2$$

$$r^2=\frac{13}{4}+5$$

$$r^2=\frac{33}{4}$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{33} \text{ br dir.}$$

Buna göre çemberin standart denklemi,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{33}\right)^2$$

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{33}{4} \text{ olur.}$$

Örnek

$x^2+y^2-8x+6y+k=0$ bir çember denklemi ise k nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm

$$x^2+y^2-8x+6y+k=0$$

$$x^2-8x+16-16+y^2+6y+9-9+k=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2-16-9+k=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2=25-k=r^2 \Rightarrow 25-k>0 \Rightarrow k<25 \text{ olmalıdır.}$$

Buna göre k nin alabileceği en büyük tam sayı değeri $k=24$ olur.

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminde, $-2a = D \Rightarrow a = -\frac{D}{2}$, $-2b = E \Rightarrow b = -\frac{E}{2}$

$$a^2 + b^2 - r^2 = F \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - F = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \text{ olur.}$$

Buna göre

1) $D^2 + E^2 - 4F > 0$ ve $A = B \neq 0$ ise denklem bir çember belirtir.

2) $D^2 + E^2 - 4F = 0$ ise denklem bir nokta belirtir.

3) $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ise denklem bir çember belirtmez.

Örnek

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8 = 0$ denkleminin çember belirtip belirtmediğini gösterelim.

Çözüm

$D = -2, \ E = -4, \ F = 8$

$$D^2 + E^2 - 4F = (-2)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot (8)$$
$$= 4 + 16 - 32$$
$$= 20 - 32$$
$$= -12 < 0$$

olduğundan denklem çember belirtmez.

Örnek

$4x^2 + 3y^2 - 2x + 3y + 5 = 0$ denkleminin çember belirtip belirtmediğini gösterelim.

Çözüm

Denklemde $A = 4$ ve $B = 3$ tür.

Yani x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları birbirinden farklıdır.

Dolayısıyla verilen denklem bir çember belirtmez.

Örnek

$x^2+y^2-2x+4y+k-1=0$ denklemi bir çember denklemi ise k hangi aralıkta değer almalıdır? Bulalım.

Çözüm

$D=-2,\ E=4,\ F=k-1$ ve denklem bir çembere ait olduğundan $D^2+E^2-4F>0$ olmalıdır.

$$D^2+E^2-4F>0 \Rightarrow (-2)^2+4^2-4\cdot(k-1)>0$$

$$4+16-4k+4>0$$

$$-4k>-24$$

$$k<6$$

Buna göre $k\in(-\infty,6)$ olur.

Örnek

$x^2+y^2-x+ky+1=0$ denklemi bir nokta belirttiğine göre k kaçtır? Bulalım.

Çözüm

$D=-1,\ E=k,\ F=1$ ve denklem bir nokta belirttiğinden $D^2+E^2-4F=0$ olmalıdır.

$$D^2+E^2-4F=0 \Rightarrow (-1)^2+k^2-4\cdot1=0$$

$$k^2-3=0$$

$$k^2=3$$

$$k=\mp\sqrt{3} \text{ olur.}$$

Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz. Arama motorunu kullanarak diğer konularla ilgili videolara da buradan ulaşabilirsiniz.

UYGULAYALIM

1. Aşağıdaki tabloda merkezi ve yarıçapının uzunluğu verilen çemberlerin standart denklemini oluşturarak tabloyu doldurunuz.

Çemberin Merkezi	Yarıçapının Uzunluğu	Çemberin Standart Denklemi
$M(a,b)$	r	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
$M(1,-2)$	2 br	
$M(-2,0)$	1 br	
$M(0,0)$	3 br	
$M(0,2)$	4 br	
$M(-3,-3)$	2 br	

2. Standart denklemi, $(x-3)^2+(y+2)^2=4$ olan çemberin genel denklemini bulunuz.

3. Genel denklemi, $x^2+y^2-4x+8y-16=0$ olan çemberin standart denklemini bulunuz.

4. Merkezi $M=(2,-4)$ ve yarıçapının uzunluğu $r=4$ br olan çemberin genel denklemini bulunuz.

5. Birim çemberin standart denklemini oluşturunuz.

6. $x^2+y^2-kx+2y+4=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre k nin alabileceği en küçük pozitif tam sayı kaçtır?

7. $x^2+y^2+2x-4y+k+1=0$ denklemi bir çember denklemi ise k nin hangi aralıkta değer alması gerektiğini bulunuz.

8. $x^2+y^2-x+2y+5=0$ denkleminin çember belirtip belirtmediğini gösteriniz.

7.1.2. Doğru ile Çemberin Birbirine Göre Durumları

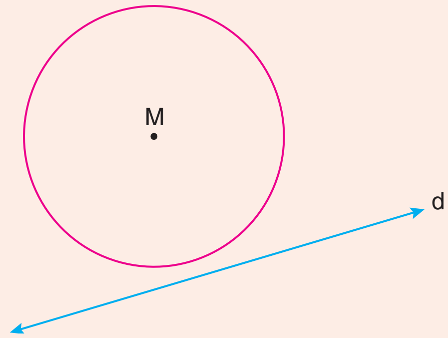
$y = mx + n$ doğru denklemi ile $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çember denklemi verilsin.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denkleminde $y = mx + n$ yazalım.

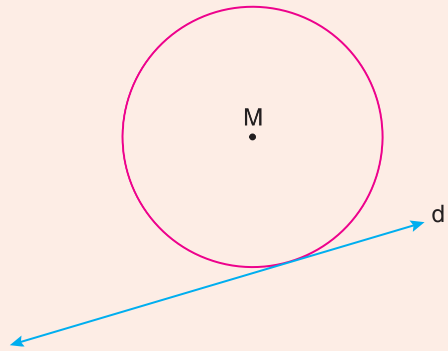
$(x - a)^2 + (mx + n - b)^2 = r^2$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.

$\triangle$ denklemin diskriminantı olmak üzere

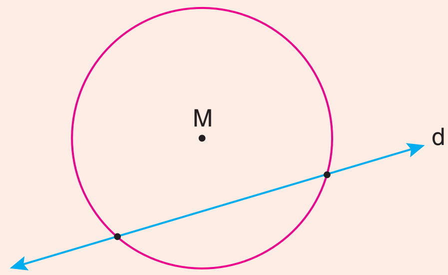
1) $\triangle < 0$ ise doğru ile çemberin ortak noktası olmadığından doğru, çemberi kesmez.



2) $\triangle = 0$ ise doğru ile çemberin bir ortak noktası olacağından doğru, çembere teğettir.



3) $\triangle > 0$ ise doğru ile çemberin iki ortak noktası olacağından doğru, çemberi farklı iki noktada keser.



Örnek

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ çemberi ile $y = -2$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyelim.

Çözüm

Çember denkleminde $y = -2$ yazalım.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (-2)^2 + 2x - 4\cdot(-2) - 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\triangle = b^2 - 4ac \Rightarrow \triangle = 2^2 - 4\cdot1\cdot1 = 4 - 4 = 0$$

olduğundan $y = -2$ doğrusu, $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ çemberine teğettir.

Örnek

$y = -1$ doğrusu, $x^2 + y^2 - 4x + m - 1 = 0$ çemberine teğet ise m kaçtır? Bulalım.

Çözüm

Çember denkleminde $y = -1$ yazalım.

$$x^2 + y^2 - 4x + m - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (-1)^2 - 4x + m - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + m = 0 \text{ olur.}$$

$y = -1$ doğrusu çembere teğet ise $\triangle = 0$ dır.

$$\triangle = b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (-4)^2 - 4\cdot1\cdot m = 0$$

$$\Rightarrow 16 - 4m = 0$$

$$\Rightarrow 4m = 16$$

$$\Rightarrow m = 4 \text{ olur.}$$

Örnek

$y = x + 1$ doğrusu, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - k + 2 = 0$ çemberini farklı iki noktada kestiğine göre k hangi aralıkta değer almalıdır? Bulalım.

Çözüm

Çember denkleminde $y = x + 1$ yazalım.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - k + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + (x+1)^2 - 2x + 4(x+1) - k + 2 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2x + 4x + 4 - k + 2 = 0$$

$$2x^2 + 4x - k + 7 = 0 \text{ olur.}$$

$y = x + 1$ doğrusu çemberi farklı iki noktada kestiğine göre $\triangle > 0$ olmalıdır.

$\triangle = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k+7) > 0$

$$16 + 8k - 56 > 0 \Rightarrow 8k - 40 > 0 \Rightarrow 8k > 40 \Rightarrow k > 5$$

Buna göre $k \in (5, \infty)$ olmalıdır.

Örnek

$y = x + 2$ doğrusu ile $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ çemberinin kesim noktalarını bulalım.

Çözüm

Çember denkleminde $y = x + 2$ yazarak denklemi çözelim.

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + (x+2)^2 - 2x - 6(x+2) + 2 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 2x - 6x - 12 + 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x+1) = 0$$

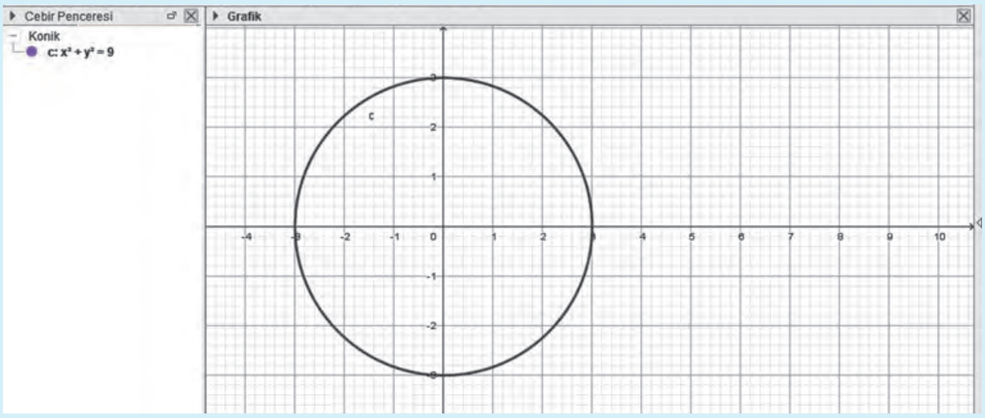
$$x = 3, \ x = -1 \text{ olur.}$$

$x = 3$ ve $x = -1$ değerlerini $y = x + 2$ de yerine yazalım.

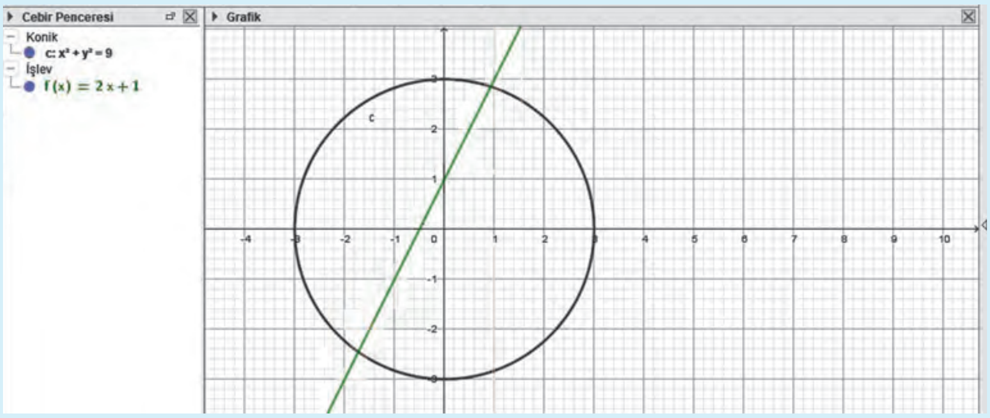
$x = 3$ için $y = 3 + 2 = 5$

$x = -1$ için $y = -1 + 2 = 1$ olduğundan kesişim noktaları $(3, 5)$ ve $(-1, 1)$ dir.

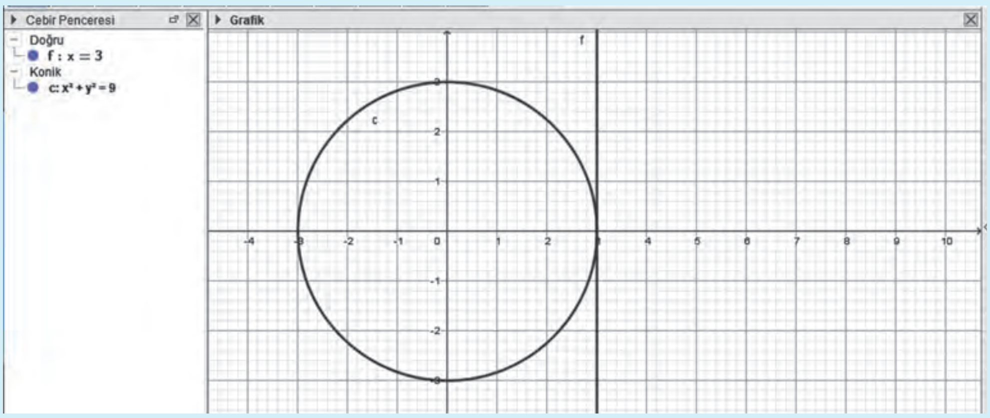
• GeoGebra programını çalıştırarak merkezi Orijin, yarıçapı 3 br olan bir çember oluşturalım.



• $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım.



• $x = 3$ doğrusunun grafiğini oluşturalım.



• Oluşturduğumuz grafiklerle çemberin birbirine göre konumunu açıklayalım.

Örnek

$y = x + 1$ doğrusu ile $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ çemberinin kesişim noktalarını bulalım.

Çözüm

Çember denkleminde $y = x + 1$ yazalım.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \Rightarrow (x-1)^2 + (x+1-2)^2 = 8$$

$$(x-1)^2 + (x-1)^2 = 8$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 8$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 8$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 3 \text{ olur.}$$

$x = -1$ için $y = x + 1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0$

$x = 3$ için $y = x + 1 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4$ olur.

Buna göre $y = x + 1$ doğrusu çemberi $(-1, 0)$ ve $(3, 4)$ noktalarında keser.

UYGULAYALIM

1. $x^2 + y^2 - 2x - y - 1 = 0$ çemberi ile $y - 1 = 0$ doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

2. $x = -2$ doğrusu $x^2 + y^2 + 2x - 4y + m = 0$ çemberine teğet ise m kaçtır?

3. $y - x - 1 = 0$ doğrusu ile $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ çemberinin kesişim noktalarını bulunuz.

4. $y = 2$ doğrusu $x^2 + y^2 - 2x + y + k - 1 = 0$ çemberini iki noktada kestiğine göre k nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

5. $y = x + 4$ doğrusunun $x^2 + y^2 - 2x + 6y + m = 0$ çemberine teğet olması için m kaç olmalıdır?

7. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Merkezi $P(3,-2)$ noktası, yarıçapının uzunluğu 2 br olan çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
B) $(x-3)^2+(y+2)^2=2$
C) $(x-3)^2+(y-2)^2=8$
D) $(x-3)^2+(y+2)^2=4$
E) $(x-3)^2+(y+2)^2=8$

2. Denklemi, $3x^2+3y^2-6x+3y-3=0$ olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

3. Denklemi, $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ olan çemberin merkezinin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2,1)$ B) $(-2,1)$ C) $(-1,2)$ D) $(-1,2)$ E) $(2,-1)$

4. $x^2+y^2+2x-4y+m=0$ denklemi bir nokta belirttiğine göre m kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5. Merkezi $(-2,-3)$ olan ve $y=3$ doğrusuna teğet olan çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x+2)^2+(y+3)^2=36$
B) $(x-2)^2+(y-3)^2=36$
C) $(x+3)^2+(y+2)^2=36$
D) $(x+3)^2+(y+2)^2=9$
E) $(x+2)^2+(y+3)^2=9$

6. $x^2+y^2-2x+6y+k=0$ denkleminin çember belirtmesi için k hangi aralıkta değer almalıdır?

A) $(-\infty,0)$ B) $(0,\infty)$ C) $(-\infty,-10)$ D) $(-10,\infty)$ E) $(-\infty,10)$

7. Denklemi, $x^2+y^2=17$ olan çember ile $y=x-3$ doğrusunun kesişim noktalarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-4,-1)$ B) $(4,1)$ C) $(-4,1)$ D) $(-1,-2)$ E) $(-1,4)$

ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARLARI

1. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. C	7. B	13. B	19. D	25. A
2. C	8. C	14. D	20. B	26. D
3. B	9. D	15. A	21. A	
4. D	10. B	16. B	22. B	
5. E	11. E	17. E	23. C	
6. A	12. C	18. E	24. C	

2. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. E	5. D	9. B	13. B	17. A
2. C	6. D	10. C	14. C	18. C
3. D	7. E	11. A	15. D	19. C
4. D	8. A	12. D	16. C	

3. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. B	4. D	7. E	10. D	13. D
2. D	5. A	8. A	11. C	
3. B	6. E	9. E	12. D	

4. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. A	3. B	5. E	7. C	9. D
2. C	4. D	6. A	8. E	10. E

5. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. C	11. D	21. E	31. C
2. D	12. C	22. C	32. E
3. E	13. C	23. D	33. D
4. B	14. D	24. A	34. B
5. E	15. A	25. D	35. E
6. B	16. E	26. C	36. B
7. D	17. A	27. E	37. D
8. B	18. B	28. E	
9. C	19. E	29. A	
10. A	20. B	30. E	

6. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. D	6. E	11. D	16. D
2. E	7. B	12. A	17. B
3. D	8. C	13. E	
4. B	9. A	14. B	
5. A	10. D	15. E	

7. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. D	3. E	5. A	7. E
2. B	4. C	6. B	

SÖZLÜK

A

analitik düzlem : Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

apsis : Koordinat sistemindeki bir noktanın birinci bileşeni.

apsisler ekseni : Koordinat sistemini oluşturan yatay eksen.

aralık : Verilen iki reel sayı arasındaki bütün reel sayıları kapsayan küme.

aritmetik dizi : Ardışık terimleri arasındaki farkı sabit olan dizi.

aritmetik ortalama : Dizi içindeki terimlerin toplamının terim sayısına bölünmesiyle bulunan değer.

B

birim çember : Yarıçapı bir birim olan ve merkezi orijinde bulunan çember.

boş küme : Hiç elemanı olmayan küme.

büküm noktası : Bir fonksiyonun eğrilik durumu. Çukurluk yönünün yön değiştirdiği ve sürekli olduğu nokta.

Ç

çember : Merkez denilen sabit bir noktadan aynı uzaklık ve düzlemdeki noktalar kümesinin oluşturduğu kapalı eğri.

çift fonksiyon : Grafiği y eksenine göre simetrik olan fonksiyon.

E

eğim : Analitik düzlemde bir doğrunun x ekseni ile yapmış olduğu pozitif yönlü açının tanjantı.

ekstremum değer : Fonksiyonun en büyük ve en küçük değerlerinden her biri.

eşitsizlik : İki veya daha çok şeyin eşit olmaması durumu.

G

gerçek sayılar : Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini kapsayan kümenin elemanları.

grafik : Bir fonksiyonun $(x, f(x))$ noktalar kümesinin koordinat sisteminde işaretlenmesi ile oluşturulan birleşim kümesi.

İ

integral : Türevi bilinen bir fonksiyonu bulma işlemi.

integrasyon sabiti : $\int f(x)dx = F(x) + C$ eşitliğindeki C reel sayısı.

ivme : Bir cismin zamana bağlı olarak hızının değişim oranı.

M

maksimum değer : Bir fonksiyonun bir aralıkta almış olduğu en büyük değer.

minimum değer : Bir fonksiyonun bir aralıkta almış olduğu en küçük değer.

N

negatif yön : Bir çemberde saatin dönme yönü.

O

ordinat : Koordinat sistemindeki bir noktanın ikinci bileşeni.

ordinatlar ekseni : Koordinat sistemini oluşturan dikey eksen.

P

parabol : İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği.

S

sabit dizi : Bütün terimleri, aynı sabit sayı olan dizi.

sıralı ikili : a ve b gibi iki elemanın öncelik sırasına göre (a, b) biçiminde yazılarak elde edilen (a, b) biçiminde yazılması ile ilde edilen ikili.

simetri : Eksen olarak alınan bir doğrudan, benzer noktaları karşılıklı olarak aynı uzaklıkta bulunan iki benzer parçanın birbirine göre durumu.

sonlu dizi : Elemanları sonlu olan dizi.

süreklilik : Bir fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti ile o noktasındaki görüntüsünün eşit olması ve bu durumun fonksiyonun tanım kümesindeki bütün x_0 lar için sağlanması.

T

tek fonksiyon : Grafiği orijine göre simetrik olan fonksiyon.

türev : $[a, b]$ nda tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonuna verilecek olan çok küçük bir $\triangle x$ artışında fonksiyon artmasının değişken artmasına oranının (değişken artmasının 0 a yaklaştığındaki) limit değeri.

türevlenebilir fonksiyon : Tanım kümesindeki her (a, b) nin her noktasında türevi tanımlı olan bir fonksiyon.

Y

yansıma : Doğruya göre simetri

yerel ekstremum : Bir fonksiyonun sürekli olduğu belli aralıktaki en büyük veya en küçük değeri.

KAYNAKÇA

Altun, M. *Liselerde Matematik Öğretimi*, İstanbul: Aktüel Alfa Akademi Yayınları, 2009.

Brown, Richard Gendal. *Advanced Mathematics,* Boston: Houghton Mifflin Company, 1994.

Exploring Mathematics, USA: Scott Foresman, 1994.

Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (9, 10, 11. ve 12. sınıflar). Ankara; MEB, 2018.

Türkçe Sözlük, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2011.

Yazım Kılavuzu, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

GÖRSEL KAYNAKÇA

http://www.shutterstock.com adlı Genel Ağ sitesinden telif hakkı ödenerek satın alınmış görseller: Sayfa 11, 15, 56, 59, 90, 92, 99, 128, 153, 179.

Yayınevi arşivi: Sayfa 26, 93, 167, 174, 185.

SEMBOLLER VE GÖSTERİMLER

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{I}$	:	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçek sayılar kümesi
$=$	:	Eşittir.
$\neq$	:	Eşit değildir.
$\approx$	:	Yaklaşık olarak
$<$	:	Küçük
$\leq$	:	Küçük eşit
$>$	:	Büyük
$\geq$	:	Büyük eşit
//	:	Paralel
$\perp$	:	Dik
$\Rightarrow$	:	İse (gerektirme)
$\Leftrightarrow$	:	Çift yönlü gerektirme
e	:	e sayısı
π	:	Pi sayısı
$\in$	:	Elemanı
$\notin$	:	Elemanı değil
$\exists$	:	Bazı, en az bir
$\forall$	:	Her, tüm
$[AB]$	:	AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	:	$[AB]$ nın uzunluğu
$[a, b]$	:	a, b kapalı aralığı
(a, b)	:	a, b açık aralığı
$A(a, b)$	:	A noktası
$\log_a x$	:	x in a tabanına göre logaritması
lnx	:	Doğal logaritma fonksiyonu
(a_n)	:	a_n dizisi
$\lvert x \rvert$	:	x in mutlak değeri
$\sum$	:	Toplam sembolü
$+\infty$	:	Artı sonsuz
$-\infty$	:	Eksi sonsuz
$g \circ f$	:	g bileşke f fonksiyonu
f^{-1}	:	f nin ters fonksiyonu
logx	:	Onluk logaritma fonksiyonu
sin	:	Sinüs
cos	:	Kosinüs
tan	:	Tanjant
cot	:	Cotanjant (Kotanjant)
sec	:	Secant (sekant)
lim	:	Limit
r	:	Çemberin yarıçapı
R	:	Çemberin çapı
$x \to a$	:	x a ya yaklaşırken
$x \to a^-$	:	x a ya soldan yaklaşırken
$x \to a^+$	:	x a ya sağdan yaklaşırken
f'	:	f fonksiyonunun türevi
$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$	:	f fonksiyonunun x değişkenine göre 2. basamaktan türevi
$\int$	:	Belirsiz integral sembolü
$\int_a^b$	:	Belirli (sınırlı) integral sembolü